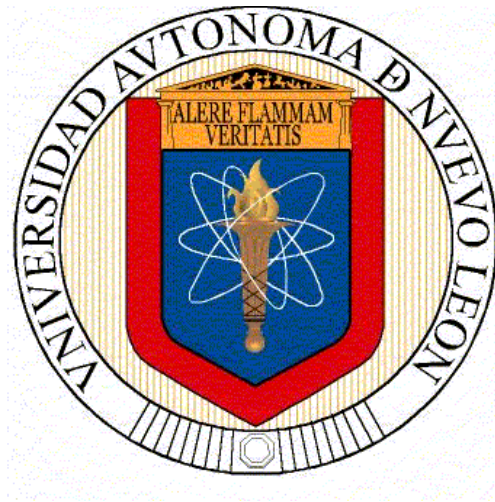


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS

MOTOR VIRTUAL DE SISTEMAS HAMILTONIANOS
CONSERVATIVOS

PRESENTADA POR

HOMERO ENRIQUE DE LA FUENTE GARCÍA

PARA CUMPLIR CON LOS REQUISITOS DE OBTENCIÓN DEL
GRADO DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JULIO 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN



TESIS

MOTOR VIRTUAL DE SISTEMAS HAMILTONIANOS
CONSERVATIVOS

PRESENTADA POR

HOMERO ENRIQUE DE LA FUENTE GARCÍA

PARA CUMPLIR CON LOS REQUISITOS DE OBTENCIÓN DEL
GRADO DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JULIO 2015

Asesor:
Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez.

Co-asesor:
Dr. Javier Morales Castillo.

Sinodal:
Dr. Omar Gonzalez Amezcua.

“Uno entra en la primera habitación de una mansión y está en la oscuridad, en una oscuridad completa. Vas tropezando y golpeando los muebles, pero poco a poco aprendes dónde está cada elemento del mobiliario. Al fin, tras unos meses, encuentras el interruptor de la luz y de repente todo está iluminado, puedes ver exactamente dónde estás. Entonces vas a la siguiente habitación y vuelves a pasar meses en las tinieblas. Así, cada uno de estos progresos, aunque a veces son muy rápidos y se realizan en un solo día o dos, son la culminación de meses precedentes de tropezones en la oscuridad, sin los que el avance sería imposible.”

Andrew Wiles

Agradecimientos

Quiero empezar por agradecer a mis padres por su apoyo incondicional y económico a lo largo de mi Maestría, sin ellos no hubiera sido posible llegar aquí. Siguiendo, quisiera mencionar a mi asesor, el Dr. Javier Almaguer, por tenerme una enorme paciencia a lo largo de estos 2 años que ha durado la Maestría; a veces parecía que yo desaparecía de la faz de la tierra, pero él siempre confió en mí, sabía que de mi desorden, algo bueno tenía que salir como producto final. No soy un hombre de muchas palabras, pero creo haber terminado con esta sección, a las personas importantes se les hace saber que son importantes y se les agradece en persona, por esta razón, me guardo mis mejores palabras para el momento adecuado.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VI
1. Sistemas Hamiltonianos Conservativos	1
1.1. Sistemas Hamiltonianos Conservativos	1
1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange	4
1.3. Existencia y unicidad de soluciones a las ecuaciones del movimiento en coordenadas curvilíneas, en \mathbb{R}^3	6
2. Colisiones Elásticas	12
2.1. Colisiones Elásticas	12
2.1.1. Colisión Elástica de dos discos rígidos en \mathbb{R}^2	12
2.1.2. Colisión Elástica de un disco rígido contra una pared en \mathbb{R}^2	29
3. Un algoritmo computacional para las integrales del movimiento	32
3.1. Linearización de las ecuaciones del movimiento bajo cualquier sistema coordenado ortogonal. . . .	32
3.2. Un algoritmo para las integrales del movimiento cuando el esquema de linealización falla.	70
4. El proceso de Animación.	81

4.1.	Discretización de las integrales del movimiento. . .	81
4.2.	Un algoritmo para la animación de un <i>Sistema</i> <i>Hamiltoniano Conservativo</i>	83
4.2.1.	El algoritmo.	85
5.	Perspectivas y conclusiones	93

Introducción

En esta Tesis se desarrolla un motor virtual de sistemas hamiltonianos conservativos basado en C++, un conjunto de librerías de C++ que dotará al usuario de las herramientas necesarias para realizar, con el poder de cómputo necesario, simulaciones de casi cualquier sistema conservativo de la mecánica clásica. El usuario podrá ver en una pantalla gráfica *la solución a las ecuaciones del movimiento y la dinámica del sistema*, se incluye un programa que corre en cualquier compilador de C++ y que le pide al usuario ciertos datos de entrada para producir una ventana gráfica con el contenido recién mencionado.

En el primer capítulo se describe con exactitud lo que en esta Tesis se da a entender con *Sistema Hamiltoniano Conservativo*, el cuál puede ó no presentar ligaduras, estas ligaduras pueden ser *holonómicas* ó *no holonómicas*, también se definen a estos dos tipos de ligaduras. Se escriben las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Sistema Hamiltoniano Conservativo en \mathbb{R}^3 con 3 grados de libertad (1 punto), pero con la peculiaridad de que se toma en cuenta un sistema coordenado ortogonal arbitrario y las ecuaciones de Euler-Lagrange se dejan en términos muy generales, mediante los factores de escala y el potencial conservativo asociado al sistema; se toman estas ecuaciones del movimiento y se analiza la existencia y unicidad de su solución, usando los teoremas de *Peano* y *Picard*.

Como se explicó en el capítulo 4: “*El proceso de animación*”; obtener las integrales del movimiento y realizar la animación para N partículas o para 1 partícula es lo mismo; tomando en cuenta que el motor se restringe a Sistemas Hamiltonianos sin potenciales de interacción entre sus partes, por ejemplo, en el caso del péndulo doble en 2-D: *este sistema esta compuesta de 2 partículas, pero no existe un potencial de interacción entre ellas, solo un par de ligaduras que se presentán como las varillas rígidas que unen al origen con la primer partícula y a la primer partícula con la segunda partícula; los efectos de masa y energía de estas varillas se ignoran en el típico problema del péndulo doble.*

En el segundo capítulo se analiza, en \mathbb{R}^2 , la colisión elastica entre dos discos rígidos y entre un disco rígido con una pared que se idealiza como inamovible. El motivo de este capítulo es la animación de uno de los casos de estudio que esta destinado a presentarse en la disertación de tesis de maestría: *el choque elástico de N discos rígidos confinados a una caja cuadrada*; en dos casos, cuando no existe una fuerza neta actuando sobre el sistema y cuando el sistema esta sumergido en el campo gravitacional de la tierra bajo la aproximación Newtoniana de que la tierra es plana, no esférica.

En el tercer capítulo se diseña un algoritmo que obtiene las integrales del movimiento de un Sistema Hamiltoniano Conservativo que esta compuesto por 1 partícula. Se intenta linealizar el sistema, bajo ciertos criterios el algoritmo evaluará cuando el sistema linealizado presentará soluciones asintóticamente estables, cuando no lo haga el algoritmo trabajará con el sistema no lineal, arrojando una solución en series de potencias.

En el cuarto capítulo se diseñ un algoritmo para la anima-

ción del Sistema Hamiltoniano Conservativo compuesto por 1 partícula, dado que ya se tienen las integrales del movimiento.

El siguiente material de apoyo: [2] , [5] ; sirvió como inspiración y me ayudo a que las ideas fluyeran con mas rapidez; invito a quien sea que este leyendo la tesis en estos momentos a que vaya a estas referencias y les eche un vistazo, presentan un vistazo al extenso mundo de aplicación práctica donde todas las ideas que se desarrollaron en esta tesis pueden hallar un lugar. Quiero aclarar, con riesgo de sonar altanero, les aseguro no es mi intención, la presente tesis es original y no se parece en lo más mínimo a las referencias que hago alusión en este texto.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos Conservativos

1.1. Sistemas Hamiltonianos Conservativos

Empecemos por considerar los siguientes dos tipos de sistemas

1.- Sistemas compuestos por “ N ” partículas clásicas puntuales, para

$N = 1, 2, 3, \dots, m$; siendo m algún número entero mayor a 0.

2.- Sistemas compuestos por “ N ” cuerpos rígidos que no presentan movimiento rotacional, para $N = 1, 2, 3, \dots, m$; siendo m algún número entero mayor a 0 ; limitemos nuestra discusión a cuerpos rígidos representados por discos y polígonos convexos en 2 dimensiones y por esferas en 3 dimensiones.

Para cuando el sistema es de $N = 1$ partícula, su dinámica puede ser descrita usando un máximo de 2 grados de libertad en \mathbb{R}^2 y un máximo de 3 grados de libertad en \mathbb{R}^3 . La dinámica de $N = 1$ cuerpo rígido que no presenta movimiento rotacional puede ser descrita usando el mismo número de grados de libertad que el número de grados de 1 partícula puntual. Existen

sistemas y dinámicas con un número infinito contable de grados de libertad e inclusive con un número infinito no contable de grados de libertad, pero en la presente tesis se contemplan únicamente sistemas con N grados de libertad, con $N < \infty$.

Para continuar con la discusión de lo que es un sistema hamiltoniano conservativo, se considerará por el momento, únicamente el caso de un sistema de “N” partículas clásicas puntuales, pues es casi el mismo sistema que el de “N” cuerpos rígidos que no rotan.

Un sistema conservativo es aquel en el cuál todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, internas y externas (excepto posibles fuerzas de constreñimiento), son derivables de potenciales escalares que dependen únicamente de la posición; alternatively, podemos definir a un sistema conservativo como aquel donde se conoce la energía potencial total del sistema y esta solo depende de las coordenadas generalizadas, incluyendo la asociada a una posible interacción entre diferentes partículas del sistema. En un sistema, sea conservativo o no, hay que considerar si se presentan restricciones holonómicas o no holonómicas.

Digamos que se tiene un sistema de “N” partículas y consideremos una función “ F ” de las coordenadas generalizadas y posiblemente del tiempo

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (1.1)$$

Toda restricción que posea el sistema que pueda ser puesta de la forma (1.1), se le denomina *restricción holonómica*; si existe una restricción que no puede ser puesta en la forma (1.1) entonces se le denomina *restricción no holonómica*, [1].

Sea un sistema conservativo que puede ser descrito por “N” puntos

en el plano, consideremos ciertas condiciones iniciales para este sistema; si estamos interesados en obtener la evolución temporal de este sistema, al menos desde un punto de vista teórico, tenemos 2 caminos

1.- Investigar que fuerzas actúan en el sistema, después usar las leyes de Newton para deducir lo que se conoce como ecuaciones del movimiento: *un sistema de ecuaciones diferenciales que contienen la dinámica del sistema*; finalmente resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

2.- Investigar la energía potencial del sistema y usar el principio de mínima acción para deducir las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange; también se necesita de el escalar “*energía cinética*”, pero este se deduce directamente usando las coordenadas generalizadas.

Se optará por usar el camino 2 en lo que resta de este capítulo y lo que resta de la tesis, además se considerarán únicamente sistemas conservativos no relativistas y sin restricciones *no holonómicas*.

Finalmente decimos que un *Sistema Hamiltoniano Conservativo* es un sistema conservativo donde sus ecuaciones del movimiento pueden ser obtenidas mediante la aplicación del *Principio de Hamilton* como *Principio de Mínima Acción* ^{1,2}.

Hay cierto tipo de restricciones no holonómicas que de presentarse en un sistema, impiden la aplicación del *Principio de Mínima Acción* en su versión conocida como *Principio de Hamilton*, existen variantes del *Principio de Mínima Acción* diferentes al *Principio de Hamilton*, [3].

1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

La dinámica de un sistema Hamiltoniano conservativo sin restricciones no-holonómicas en \mathbb{R}^3 esta completamente determinada por las ecuaciones de Euler-Lagrange, cuando se obtienen estas ecuaciones mediante el Principio de Hamilton y un potencial total del sistema que no depende de las velocidades generalizadas; las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema descrito son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - V(\vec{r}) \quad (1.3)$$

donde el vector posición en coordenadas cartesianas es

$$\vec{r} = \left(x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3) \right) \quad (1.4)$$

y $\{q_1, q_2, q_3\}$ es el sistema coordenado ortogonal que el usuario quiera usar, esto es, el usuario deberá proveer las coordenadas cartesianas como funciones de $\{q_1, q_2, q_3\}$. Se especificará una sola vez, pero hagamos notar que el vector velocidad se representará como: $\dot{\vec{r}} = \partial_t \vec{r}$.

Si queremos estudiar la evolución temporal de una partícula puntual, solo necesitamos especificar unas condiciones iniciales, un potencial $V(\vec{r})$ y las funciones coordenadas; si decidimos usar coordenadas cartesianas, las funciones coordenadas son

$$\begin{pmatrix} x(x, y, z) \\ y(x, y, z) \\ z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Hallemos las ecuaciones del movimiento de una partícula puntual sujeta a un potencial $V(\vec{r})$ y en un sistema coordenado ortogonal arbitrario $\{q_1, q_2, q_3\}$. Digamos que la elección de este

sistema ya toma en cuenta dentro de sus funciones coordenadas la elección de nuestro origen ó el querer posiblemente rotar fijamente al sistema.

El primer paso sera hallar el vector velocidad usando de base los vectores unitarios “ $\hat{\mathbf{q}}_i$ ”, $i = 1, 2, 3$. Para el sistema ortogonal $\{q_1, q_2, q_3\}$, si $\vec{\mathbf{r}}_c$ es el vector posición en coordenadas cartesianas, los vectores unitarios se definen como ¹

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_c}{\partial q_i} \quad \text{donde} \quad h_i = \left\| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_c}{\partial q_i} \right\| \quad (1.6)$$

a “ h_i ” se le denomina *factor de escala*, que en general sera una función de las coordenadas generalizadas: $h_i(q_1, q_2, q_3)$. Usando la regla de la cadena, derivemos respecto al tiempo a $\vec{\mathbf{r}}_c$

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}_c = \sum_i \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \right) \quad (1.7)$$

Se empezara a usar la siguiente notación: $\frac{\partial x}{\partial q_i} = \partial_{q_i} x$; similarmente para “ y ” ó “ z ”, o cualquier otra función. Ahora veamos lo siguiente

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}_c \equiv \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 + \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 + \dot{\vec{\mathbf{r}}}_3 \quad (1.8)$$

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 = \dot{q}_1 \left(\partial_{q_1} x, \partial_{q_1} y, \partial_{q_1} z \right) = \dot{q}_1 \left(h_1 \hat{\mathbf{q}}_1 \right) \quad (1.9)$$

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 = \dot{q}_2 \left(\partial_{q_2} x, \partial_{q_2} y, \partial_{q_2} z \right) = \dot{q}_2 \left(h_2 \hat{\mathbf{q}}_2 \right) \quad (1.10)$$

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}_3 = \dot{q}_3 \left(\partial_{q_3} x, \partial_{q_3} y, \partial_{q_3} z \right) = \dot{q}_3 \left(h_3 \hat{\mathbf{q}}_3 \right) \quad (1.11)$$

Usando (1.8-1.11), obtenemos el vector velocidad en un sistema coordenado ortogonal arbitrario

$$\dot{\vec{r}} = h_1 \dot{q}_1 \hat{\mathbf{q}}_1 + h_2 \dot{q}_2 \hat{\mathbf{q}}_2 + h_3 \dot{q}_3 \hat{\mathbf{q}}_3 \quad (1.12)$$

La Lagrangiana (1.3) toma la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_j \left(h_j \dot{q}_j \right)^2 - V(\vec{r}) \quad (1.13)$$

Luego, veamos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m h_i^2 \dot{q}_i \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 2 m h_i \dot{h}_i \dot{q}_i + m h_i^2 \ddot{q}_i \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{m}{2} \sum_j \left(\partial_{q_i} h_j^2 \right) \dot{q}_j^2 - \partial_{q_i} V \quad (1.16)$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento son

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{2 h_i^2} \sum_j \left(\partial_{q_i} h_j^2 \right) \dot{q}_j^2 - \left[\frac{2 \dot{h}_i \dot{q}_i}{h_i} + \frac{\partial_{q_i} V}{m h_i^2} \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

1.3. Existencia y unicidad de soluciones a las ecuaciones del movimiento en coordenadas curvilíneas, en \mathbb{R}^3

En la forma que se encuentran las ecuaciones del movimiento en (1.17) lucen muy complejas, hagamos algo al respecto para simplificar la expresión y que nos servirá para investigar las soluciones de las ecuaciones del movimiento. Empecemos por hacer la sustitución: $\varepsilon_i = \dot{q}_i$; por lo tanto

$$\dot{h}_i = \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} = \sum_j \varepsilon_j \partial_{q_j} h_i \quad (1.18)$$

Entonces, las ecuaciones del movimiento pasan a ser

$$\dot{q}_i = \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.19)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{2h_i^2} \sum_j \left(\partial_{q_i} h_j^2 \right) \varepsilon_j^2 - \left[\frac{2\varepsilon_i}{h_i} \left(\sum_j \varepsilon_j \partial_{q_j} h_i \right) + \frac{\partial_{q_i} V}{mh_i^2} \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.20)$$

Ahora enunciemos el teorema de existencia de Peano [4] y el teorema de existencia y unicidad de Picard [8]. Dadas las condiciones correctas, el teorema de Peano establece una solución para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. El teorema de Picard establece la unicidad de la solución.

Teorema 1 *Teorema de existencia de Peano.*

Sea 1) $(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni n \in \mathbb{N}$.

2) $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \ni A = \text{Dominio}(f)$, es una vecindad de (\mathbf{y}, t) .

3) f es continua en $B \subseteq A$, posiblemente $A = B$.

Si definimos un problema de valor inicial como

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(t, \mathbf{y}) \quad , \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (1.21)$$

Entonces (1.21) tiene al menos una solución definida sobre B .

Teorema 2 *Teorema de existencia y unicidad de Picard.*

Sea 1) Se cumple el teorema de existencia de Peano para alguna función $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2) f cumple la condición de Lipschitz de primer orden:

$\|f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{y}, t)\| \leq \alpha_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. A “ α_0 ” se le denomina

constante de Lipschitz.

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales definido en (1.21) tiene una única solución en el intervalo definido mediante: $|t - t_0| < d$; donde $d = \min(a, \frac{b}{B_0})$ y $B_0 = \sup \|f(\mathbf{x}, t)\|$.

Veamos que sucede con el sistema de 6 ecuaciones diferenciales definido por (1.19-1.20), dadas ciertas condiciones iniciales. Definamos las siguientes funciones escalares

$$f_i(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) = \frac{1}{2h_i^2} \sum_j \left[\varepsilon_j^2 \partial_{q_i} h_j^2 - 4\varepsilon_i \varepsilon_j h_i \partial_{q_j} h_i \right] - \frac{\partial_{q_i} V}{mh_i^2} \quad (1.22)$$

Claro que la variable “ t ” no aparece explícitamente en las funciones f_i , pero para que sirva a nuestro propósito, las f_i si las consideramos como funciones de “ t ”. Ahora definamos los siguientes vectores abstractos en \mathbb{R}^6 y en coordenadas cartesianas

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{F}(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ f_1(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) \\ f_2(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) \\ f_3(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Para conocer de manera explícita a las funciones f_i en términos de las q_i , necesitamos conocer a los factores de escala h_i y al potencial V como funciones de q_i a su vez, pero esto solo es posible hasta elegir un específico sistema ortogonal “ $\{q_1, q_2, q_3\}$ ”; ya que nosotros deseamos como meta final construir un algoritmo que use la CPU que resuelva las ecuaciones del movimiento para cualquier sistema coordenado ortogonal “ $\{q_1, q_2, q_3\}$ ” de \mathbb{R}^3 , no se podrá codificar dentro del algoritmo la existencia (mucho menos la unicidad) de la solución del problema inicial, se necesitará que el usuario presente un sistema “ $\{q_1, q_2, q_3\}$ ” lo suficientemente bien comportado. Veamos que sucede por ejemplo en coordenadas cilíndricas, las funciones coordenadas en dicho sistema son

$$\begin{pmatrix} x(\rho, \theta, z) \\ y(\rho, \theta, z) \\ z(\rho, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

con $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in (-\infty, +\infty)$. Usando (1.6), tenemos que

$$h_\rho = 1 \quad , \quad \hat{\rho} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (1.26)$$

$$h_\theta = \rho \quad , \quad \hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad (1.27)$$

$$h_z = 1 \quad , \quad \hat{z} = (0, 0, 1) \quad (1.28)$$

Ahora obtengamos explícitamente para coordenadas cilíndricas, las funciones escalares definidas en (1.22)

$$\begin{aligned} f_\rho(\rho, \theta, z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) &= \sum_j \varepsilon_j^2 \partial_\rho h_j^2 - \frac{\partial_\rho V}{m} \\ &= 2\rho \varepsilon_\theta^2 - \frac{\partial_\rho V}{m} \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
f_\theta(\rho, \theta, z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) &= -\frac{1}{2\rho} \sum_j 4\varepsilon_i \varepsilon_j \partial_{q_j} \rho - \frac{\partial_\theta V}{m\rho^2} \\
&= -\frac{1}{2\rho} 4\varepsilon_\rho \varepsilon_\theta - \frac{\partial_\theta V}{m\rho^2}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
f_z(\rho, \theta, z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) &= \sum_j \varepsilon_j^2 \partial_z h_j^2 - \frac{\partial_{q_i} V}{m h_i^2} \\
&= -\frac{\partial_z V}{m}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Entonces, de (1.24), tenemos que

$$\mathbf{F}(\rho, \theta, z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t) = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \\ 2\rho\varepsilon_\theta^2 - \frac{\partial_\rho V}{m} \\ -\frac{1}{2\rho} 4\varepsilon_\rho \varepsilon_\theta - \frac{\partial_\theta V}{m\rho^2} \\ -\frac{\partial_z V}{m} \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

Sin contar el término potencial en (1.32), se tienen puros términos que son polinomios ó multiplicación de polinomios cualquier polinomio de orden finito es infinitamente diferenciable, lo que abarca continuidad y condición Lipschitz, esto es, todo polinomio de orden finito satisface la condición Lipschitz.

Si el sistema estudiado en cilíndricas esta sumergido en un potencial *cuando menos* continuo, entonces las funciones escalares f_i (componentes 4,5 y 6 de \mathbf{F}) son continuas, excepto f_θ en el origen (f_θ se indetermina en el origen, por otro lado, la suma de funciones continuas es una función continua); luego, continuidad de las componentes de una función vectorial, implica continuidad de la función vectorial; por lo tanto, por el Teorema

de Peano, existe al menos una solución al sistema definido en (1.19) y (1.20).

Si el potencial V satisface la condición Lipschitz y además (chechar f_θ) los términos “ $\frac{\partial_\theta V}{m\rho^2}$ ” y “ $-\frac{1}{2\rho}4\varepsilon_\rho\varepsilon_\theta$ ” satisfacen por si mismos la condición Lipschitz, entonces la función vectorial \mathbf{F} definida en (1.32) satisface la condición Lipschitz [6]; por lo tanto, por el Teorema de Picard, existe una solución única al sistema definido en (1.19) y (1.20).

La dinámica de la mayoría de los sistemas mecánicos esta contenida en un sistema de ecuaciones diferenciales que se intuye muy complejo para ser resuelto en forma cerrada, a veces se desea investigar la existencia de soluciones únicas a las ecuaciones del movimiento, esto se puede hacer usando los Teoremas de Peano y Picard, de una manera igual a la que se hizo para las coordenadas cilíndricas (un sistema mecánico que tiene un origen y un sistema coordenado idénticos al origen y sistema coordenado cilíndrico).

Capítulo 2

Colisiones Elásticas

2.1. Colisiones Elásticas

2.1.1. Colisión Elástica de dos discos rígidos en \mathbb{R}^2

Primer caso: Potencial externo nulo

Se puede definir la dinámica y colisión de dos discos rígidos definiendo a sus centros como dos partículas puntuales con los vectores posición “ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ” y usando el siguiente potencial de interacción

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r \leq a + b \\ 0 & r > a + b \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r = \|\mathbf{r}\|$ y “ a, b ” son los radios del disco 1 y 2. Nos estaremos refiriendo a discos rígidos, pero estaremos tratándolos matemáticamente como partículas puntuales con el potencial de interacción definido en (2.1).

Aunque es más simple describir los efectos de una colisión en el centro de masa del sistema “(CM)”; las mediciones y experimentos se hacen usualmente en el sistema de laboratorio “(LAB)”, donde el observador está en reposo, por eso se obtendrán los vectores *posición* y *velocidad* de cada disco rígido

después de la colisión.

Es importante aclarar los siguientes dos puntos

- Dependerá de las condiciones iniciales de cada disco del sistema, para que ocurra una colisión entre los dos discos.

- Se estará trabajando asumiendo que ocurrirá una colisión, esto es, se asumirá que las condiciones iniciales son las necesarias para que ocurra la colisión, pero sin especificar cuales son, solo obteniendo las relaciones importantes en función de ciertas condiciones iniciales arbitrarias.

Se usará la siguiente notación (es una lista de datos no exhaustiva):

- “ \mathbf{r}_{1cm} ” será el vector posición del centro del disco 1 antes del choque y visto desde el centro de masa, “ \mathbf{r}_1 ” será el vector posición del centro disco 1 antes del choque y visto desde el sistema de laboratorio; “ \mathbf{r}_{*1cm} ” y “ \mathbf{r}_{*1} ”, para después del choque. Similarmente para el disco 2.

- Se tendrán masas “ m_1 y m_2 ”, velocidades antes del choque “ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_{1cm} y \mathbf{v}_{2cm} ” y velocidades después del choque “ \mathbf{v}_{*1} , \mathbf{v}_{*2} , \mathbf{v}_{*1cm} y \mathbf{v}_{*2cm} ”; supongamos que los discos no vuelven a colisionar después de un primer choque.

- El momento lineal de los discos antes del choque será “ \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_{1cm} y \mathbf{p}_{2cm} ”, el momento lineal de los discos después del

choque sera “ \mathbf{p}_{*1} , \mathbf{p}_{*2} , \mathbf{p}_{*1cm} y \mathbf{p}_{*2cm} ”.

- “ \mathbf{R} ” sera el vector posición del centro de masa respecto al sistema de laboratorio y “ \mathbf{V} ” sera la velocidad del centro de masa respecto al sistema de laboratorio.

En una primera instancia, consideremos al centro de masa como sistema de referencia

$$\mathbf{R} = \frac{m_1}{m_T} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_T} \mathbf{r}_2 \quad (2.2)$$

donde \mathbf{R} es el vector posición del centro de masa en el (LAB).

Tomando en cuenta lo siguiente: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ y $m_T = m_1 + m_2$; antes de la colisión, los vectores posición de los centros de los discos en el (LAB) se pueden reescribir como

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_T} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_T} \mathbf{r}_2 - \frac{m_2}{m_T} \mathbf{r}_2 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_T} \mathbf{r}_2 + \frac{m_1}{m_T} \mathbf{r}_1 - \frac{m_1}{m_T} \mathbf{r}_1 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_T} \mathbf{r} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_T} \mathbf{r} \quad (2.6)$$

y entonces

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_T} \mathbf{v} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{m_1}{m_T} \mathbf{v} \quad (2.8)$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del centro de masa en el (LAB). Ya que estamos en un caso libre de fuerzas externas, no existe un movimiento acelerado del centro de masa respecto al (LAB), por lo tanto, el centro de masa por si mismo es un sistema de referencia inercial. Usando la regla de adición para velocidades de la mecánica Newtoniana, se deduce el siguiente útil resultado

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1cm} - \mathbf{v}_{2cm} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, en el sistema de referencia (CM) tenemos que

$$\mathbf{v}_{1cm} = \frac{m_2}{m_T} \mathbf{v} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_{2cm} = -\frac{m_1}{m_T} \mathbf{v} \quad (2.11)$$

Sea $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_T}$, vemos que para antes de la colisión

$$\mathbf{p}_{1cm} = m_1 \mathbf{v}_{1cm} = \mu \mathbf{v} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{p}_{2cm} = m_2 \mathbf{v}_{2cm} = -\mu \mathbf{v} \quad (2.13)$$

Por lo tanto, en el centro de masa el momento total es *cero*;

$\mathbf{p}_{Tcm} = \mathbf{p}_{1cm} + \mathbf{p}_{2cm} = 0$. Podemos también escribir

$$\mathbf{p}_{1cm} = \mu v \hat{\mathbf{v}} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{p}_{2cm} = -\mu v \hat{\mathbf{v}} \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{v}}$.

Después del choque *elástico* entre los dos discos, se conserva el momento lineal total y la energía cinética del sistema; por otro lado, en ausencia de fuerzas externas la energía total es la energía cinética total; por lo tanto tenemos lo siguiente

$$\mathbf{p}_{*Tcm} = \mathbf{p}_{*1cm} + \mathbf{p}_{*2cm} = 0 \quad (2.16)$$

$$E_{cm} = \frac{(\mu v)^2}{2m_1} + \frac{(\mu v)^2}{2m_2} = \frac{\mu v^2}{2} \quad (2.17)$$

con

$$\mathbf{p}_{*1cm} = \mu v \hat{\mathbf{v}}_* \quad (2.18)$$

$$\mathbf{p}_{*2cm} = -\mu v \hat{\mathbf{v}}_* \quad (2.19)$$

siendo $\pm \hat{\mathbf{v}}_*$ el vector unitario dirección de los momentos lineales después de la colisión ($+\hat{\mathbf{v}}_*$ para \mathbf{p}_{*1cm} y $-\hat{\mathbf{v}}_*$ para \mathbf{p}_{*2cm}). Ahora definamos al ángulo “ χ ” de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_* = \cos \chi \quad (2.20)$$

Hasta el momento solo dijimos que no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, pero no se ha hablado sobre un posible potencial de interacción, pero solo consideraremos como único potencial de interacción al que define al sistema de discos rígidos (2.1), entonces para asegurar la conservación del momento, tenemos que el ángulo definido en (2.20) tiene que ser el siguiente

$$\chi = \pi - 2\phi \quad (2.21)$$

donde ϕ es el ángulo entre el momento lineal antes de la colisión de cualquiera de los dos discos y la línea recta que cruza el centro de ambos discos al momento de la colisión.

Como se dijo al principio, usualmente las mediciones se hacen en el sistema de laboratorio, pero (2.21) es el ángulo entre el momento lineal antes de la colisión y el momento lineal después de la colisión, el mismo para ambos discos, respecto al centro

de masa. Como se vera a continuación, necesitaremos (2.21) para obtener los momentos lineales de cada disco después de la colisión respecto al (LAB).

Consideremos al sistema de laboratorio como sistema de referencia, usando (2.7) y (2.8), tenemos que los momentos lineales de los discos respecto al (LAB) son

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{V} + \mu v \hat{\mathbf{v}} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{V} - \mu v \hat{\mathbf{v}} \quad (2.23)$$

Por conservación del momento lineal del sistema, la velocidad del centro de masa no cambia a causa de la colisión, por lo tanto, después del choque

$$\mathbf{p}_{*1} = m_1 \mathbf{V} + \mu v \hat{\mathbf{v}}_* \quad (2.24)$$

$$\mathbf{p}_{*2} = m_2 \mathbf{V} - \mu v \hat{\mathbf{v}}_* \quad (2.25)$$

donde

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_T} \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_T} \mathbf{v}_2 \quad (2.26)$$

Todos los datos importantes del sistema antes de la colisión de los dos discos se pueden obtener mediante las técnicas de la mecánica clásica, incluyendo $\hat{\mathbf{v}}$; entonces, usando (2.20) y (2.21), podemos obtener $\hat{\mathbf{v}}_*$, rotando $\hat{\mathbf{v}}$ en χ grados; si \mathbf{M} representa la matriz de rotación de puntos en \mathbb{R}^2 , o de puntos en \mathbb{R}^3 dejando uno de los 3 ejes cartesianos fijo, entonces

$$\hat{\mathbf{v}}_* = \mathbf{M}_\chi \hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{v}} \quad (2.27)$$

Ahora hay que obtener la velocidad relativa de dos disco rígidos para nuestro primer caso libre de fuerzas externas. Usando coordenadas cartesianas, primero tenemos que las integrales del movimiento de los discos rígidos antes de la colisión, son

$$x_1(t) = a_1t + b_1 \quad (2.28)$$

$$y_1(t) = c_1t + d_1 \quad (2.29)$$

$$x_2(t) = a_2t + b_2 \quad (2.30)$$

$$y_2(t) = c_2t + d_2 \quad (2.31)$$

donde “ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ ” son las condiciones iniciales; si t_* es el valor del tiempo o instante en el cuál sucede la colisión, entonces las relaciones (2.28-2.31) son válidas en el intervalo: $t \in [0, t_*]$. Los vectores *posición* y *velocidad* de los discos, son

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle a_1t + b_1, c_1t + d_1 \rangle \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \langle a_2t + b_2, c_2t + d_2 \rangle \quad (2.33)$$

$$\mathbf{v}_1(t) = \langle a_1, c_1 \rangle \quad (2.34)$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \langle a_2, c_2 \rangle \quad (2.35)$$

$$t \in [0, t_*].$$

La velocidad relativa (2.9), es

$$\mathbf{v}(t) = \langle a_1 - a_2, c_1 - c_2 \rangle \quad (2.36)$$

notesé que $\mathbf{v}(t)$ en (2.36) es una función constante. También tenemos

$$\|\mathbf{v}\| = v = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{v} \langle a_1 - a_2, c_1 - c_2 \rangle \quad (2.38)$$

Recordemos que $\pm \hat{\mathbf{v}}$, son las direcciones de los momentos lineales de cada disco antes de la colisión en el (C.M); para obtener $\pm \hat{\mathbf{v}}_*$, que son las direcciones de los momentos lineales de cada disco después de la colisión en el (C.M), usamos (2.27)

$$\hat{\mathbf{v}}_* = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_* = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} (a_1 - a_2)\cos \chi - (c_1 - c_2)\sin \chi \\ (a_1 - a_2)\sin \chi + (c_1 - c_2)\cos \chi \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

ya con (2.40); podemos obtener respecto al sistema de laboratorio, el vector velocidad de cada disco después de la colisión, usando (2.24) y (2.25), tenemos que

$$\mathbf{v}_{*1} = \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_T} \begin{pmatrix} (a_1 - a_2)\cos \chi - (c_1 - c_2)\sin \chi \\ (a_1 - a_2)\sin \chi + (c_1 - c_2)\cos \chi \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{v}_{*2} = \mathbf{V} - \frac{m_1}{m_T} \begin{pmatrix} (a_1 - a_2)\cos \chi - (c_1 - c_2)\sin \chi \\ (a_1 - a_2)\sin \chi + (c_1 - c_2)\cos \chi \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Simplificando un poco, se introducen las siguientes constantes

$$\phi_0 = \frac{1}{m_T} \left[m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_2 (a_1 - a_2) \cos \chi - m_2 (c_1 - c_2) \sin \chi \right] \quad (2.43)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{m_T} \left[m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_2 (a_1 - a_2) \operatorname{sen} \chi + m_2 (c_1 - c_2) \cos \chi \right] \quad (2.44)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{m_T} \left[m_1 a_1 + m_2 a_2 - m_1 (a_1 - a_2) \cos \chi + m_1 (c_1 - c_2) \operatorname{sen} \chi \right] \quad (2.45)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{m_T} \left[m_1 c_1 + m_2 c_2 - m_1 (a_1 - a_2) \operatorname{sen} \chi - m_1 (c_1 - c_2) \cos \chi \right] \quad (2.46)$$

Representando al vector *velocidad* de cada disco después de la colisión, como un vector columna, tenemos que

$$\mathbf{v}_{*1} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{v}_{*2} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Nuevamente como vectores columna, el vector *posición* de cada disco después de la colisión, es

$$\mathbf{r}_{*1} = \begin{pmatrix} \phi_0 t + e_0 \\ \phi_1 t + e_1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{r}_{*2} = \begin{pmatrix} \sigma_0 t + f_0 \\ \sigma_1 t + f_1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

donde “ e_0, e_1, f_0, f_1 ” vendrían a ser las *nuevas condiciones iniciales*; las relaciones (2.47-2.50) son válidas en el intervalo temporal: $t \in [t_*, \infty)$, suponiendo que ya no existan colisiones a

futuro. Las trayectorias de los discos “ \mathbf{r}_{*1} y \mathbf{r}_{*2} ” definidas desde el instante de la colisión y para cualquier tiempo posterior, deben coincidir en el instante de la colisión, con las trayectorias de los discos “ \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ” definidas para todo instante antes de la colisión.

Las relaciones (2.32-2.35) y (2.47-2.50) caracterizan por completo la dinámica de dos discos rígidos antes y después de la colisión, siendo iguales en el instante “ t_* ” de la colisión; para el caso libre de fuerzas externas.

Segundo caso: El potencial gravitatorio de la Tierra como potencial externo

Se va a suponer que los dos discos rígidos están sumergidos en el potencial gravitatorio de la Tierra bajo *la aproximación “ mgh ”*, donde “ h ” es la altura vertical de cada disco en un momento arbitrario de sus trayectorias. Tomemos una vecindad \mathbf{A} (subconjunto) del cascarón esférico de la tierra, que sea lo suficientemente “pequeña” como para considerarla aproximadamente plana (como si \mathbf{A} fuera un subconjunto del espacio Euclídeo \mathbb{R}^2); la aproximación que estamos tomando implica que el sistema de referencia de laboratorio a considerar para el sistema de los dos discos rígidos pertenece a alguna vecindad igual a la vecindad \mathbf{A} ya descrita.

Ya que no hay potencial de interacción entre los discos rígidos, es fácil hallar la dinámica de los dos discos antes del choque este, pues esta está desacoplada. Usando coordenadas cartesianas, los vectores posición de los discos antes de una primera colisión en el (LAB), son

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle x_1(t), y_1(t) \rangle \quad (2.51)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \langle x_2(t), y_2(t) \rangle \quad (2.52)$$

Las lagrangianas de cada disco son

$$L_1 = \frac{m_1}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right) - mgy_1 \quad (2.53)$$

$$L_2 = \frac{m_2}{2} \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - mgy_2 \quad (2.54)$$

Usando las siguientes condiciones iniciales:

$\mathbf{r}_1(0) = (a_0, a_1)$, $\dot{\mathbf{r}}_1(0) = (a_2, a_3)$, $\mathbf{r}_2(0) = (b_0, b_1)$, $\dot{\mathbf{r}}_2(0) = (b_2, b_3)$, donde “ $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ ” son constantes; se puede deducir que las integrales del movimiento antes de la primer colisión en el sistema de laboratorio, son

$$x_1(t) = a_2t + a_0 \quad (2.55)$$

$$y_1(t) = -\frac{g}{2}t^2 + a_3t + a_1 \quad (2.56)$$

$$\dot{x}_1(t) = a_2 \quad (2.57)$$

$$\dot{y}_1(t) = -gt + a_3 \quad (2.58)$$

$$x_2(t) = b_2t + b_0 \quad (2.59)$$

$$y_2(t) = -\frac{g}{2}t^2 + b_3t + b_1 \quad (2.60)$$

$$\dot{x}_2(t) = b_2 \quad (2.61)$$

$$\dot{y}_2(t) = -gt + b_3 \quad (2.62)$$

Falta hallar las trayectorias y las velocidades de los discos después de la colisión, en el sistema de laboratorio.

Sean “ ρ_1, ρ_2 ” los radios del disco 1 y 2 respectivamente, tomando en cuenta que

- $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ y $\|\mathbf{r}\| = r$.

Si se asume una colisión elástica, esta sucederá cuando $r \leq \rho_1 + \rho_2$; naturalmente que suceda ó no la colisión dependerá de las condiciones iniciales “ $a_i, b_i; i = 0, 1, 2, 3$ ”. Se usarán las técnicas de las secciones 1 y 2 para obtener las trayectorias y velocidades de los discos después de la colisión.

Pero primero necesitamos hacer un cálculo necesario: *imaginemos un vector “ \mathbf{A} ” que inicia en el origen de un sistema coordenado rotatorio “ \mathcal{S} ” (con eje de rotación definido por el vector unitario arbitrario $\hat{\mathbf{n}}$) y termina en algún punto arbitrario del plano, obtengamos la derivada temporal de \mathbf{A} pero respecto a otro sistema de referencia “ \mathcal{O} ”, tal que \mathcal{O} esta fijo; después de hacer este cálculo se haran ciertas aclaraciones antes de obtener las trayectorias deseadas.*

Tomemos otro vector \mathbf{r} respecto a \mathcal{S} , que va del origen de \mathcal{S} también a un punto arbitrario en el plano, el vector \mathbf{r} estará rotando respecto al eje definido por $\hat{\mathbf{n}}$. Tomando una rotación infinitesimal, el vector \mathbf{r} rota en “ $d\phi$ ” grados respecto al eje $\hat{\mathbf{n}}$ en un cierto tiempo dt , matemáticamente esto quiere decir lo siguiente

$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r} + d\mathbf{r} \quad (2.63)$$

$$\|d\mathbf{r}\| = dr = (r \sin \theta) d\phi \quad (2.64)$$

siendo “ $d\mathbf{r}$ ” perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$ y a \mathbf{r} . Por otro lado, veamos lo siguiente

$$\|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}\| = r \sin \theta \quad (2.65)$$

Hagamos la siguiente sustitución

$$\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} \quad (2.66)$$

Notorioamente, “ $\boldsymbol{\alpha}$ y $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ ” son vectores perpendiculares a $\hat{\mathbf{n}}$ y \mathbf{r} , por lo tanto

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\boldsymbol{\alpha}} = (r \sin \theta) d\phi \hat{\boldsymbol{\alpha}} = d\phi \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} \quad (2.67)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\phi \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}}{dt} \quad (2.68)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.69)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{n}}$.

Ahora tomemos la derivada temporal de un vector arbitrario $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ respecto a \mathcal{O} , pero usando a la representación de \mathbf{A} en \mathcal{S} , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}^O}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[A_x^S \mathbf{s}_x + A_y^S \mathbf{s}_y + A_z^S \mathbf{s}_z \right] \\ &= [\dot{A}_x^S \mathbf{s}_x + \dot{A}_y^S \mathbf{s}_y + \dot{A}_z^S \mathbf{s}_z] + [A_x^S \dot{\mathbf{s}}_x + A_y^S \dot{\mathbf{s}}_y + A_z^S \dot{\mathbf{s}}_z] \end{aligned} \quad (2.70)$$

entonces, por (2.69), tenemos que

$$\begin{aligned}
& [\dot{A}_x^S \mathbf{s}_x + \dot{A}_y^S \mathbf{s}_y + \dot{A}_z^S \mathbf{s}_z] + [A_x^S \dot{\mathbf{s}}_x + A_y^S \dot{\mathbf{s}}_y + A_z^S \dot{\mathbf{s}}_z] \\
&= \frac{d\mathbf{A}^S}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times [A_x^S \mathbf{s}_x + A_y^S \mathbf{s}_y + A_z^S \mathbf{s}_z] \\
&= \frac{d\mathbf{A}^S}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\frac{d\mathbf{A}^O}{dt} = \frac{d\mathbf{A}^S}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{2.72}$$

(2.72) es el resultado deseado, ahora hagamos algunas aclaraciones.

- (1) El centro de masa ya no es un sistema de referencia inercial, pues este está siendo acelerado debido al potencial gravitatorio “ mgh ”; sin embargo este sistema de referencia no está rotando, solo se está trasladando, por lo tanto: *si tenemos cierto punto arbitrario “ P ” definido en el sistema de referencia fijo “ \mathcal{O} ” donde están sumergidos los discos, mediante el vector “ \mathbf{r} ”; además decimos que el vector “ \mathbf{R} ” define al centro de masa respecto al sistema \mathcal{O} y por último decimos que el punto P es definido mediante el vector \mathbf{r}_{cm} respecto al sistema de referencia del centro de masa; entonces usando el resultado en (2.72), podemos establecer de inmediato lo siguiente*

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} \tag{2.73}$$

donde (2.73) es la regla de adición de velocidades de la mecánica Newtoniana que se cumple en sistemas de referencia inerciales.

Calculando el centro de masa de algún sistema físico que sea de tal manera que, el centro de masa del sistema actúe como un sistema de referencia no rotatorio pero no inercial y después

usando (2.72), llegamos a un resultado aún más interesante: *para sistemas de referencia que no presenten movimiento rotacional, aunque sean no inerciales por causa de alguna aceleración que afecte el movimiento traslacional del sistema, se cumple de cualquier manera la regla de adición de velocidades de la mecánica Newtoniana para sistemas de referencia inerciales.*

- (2) Usando las expresiones para las velocidades descritas de (2.55) a (2.62), notamos que aún que el centro de masa es un sistema de referencia no inercial, la velocidad relativa $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1cm} - \mathbf{v}_{2cm}$; se mantiene constante.

De (1), (2) y usando lo visto en la sección 1; a pesar de que existe el potencial “ mgh ” actuando sobre los discos, el momento lineal de cada disco en el centro de masa es constante y el momento total es igual a *cero*

$$\mathbf{p}_{1cm} = \mu v \hat{\mathbf{v}} \text{ , } \mathbf{p}_{2cm} = -\mu v \hat{\mathbf{v}} \text{ ; } \text{ con } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.74)$$

Esto quiere decir que, respecto al centro de masa como sistema de referencia, en cualquier punto de la trayectoria de los discos antes de la colisión, el momento lineal de cada uno de los discos tendrá la misma dirección.

Como en el primer caso (potencial externo nulo), sean

$$\mathbf{p}_{*1cm} = \mu v \hat{\mathbf{v}}_* \text{ , } \mathbf{p}_{*2cm} = -\mu v \hat{\mathbf{v}}_*, \quad (2.75)$$

los momentos lineales de los discos después de la colisión; siendo

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_* = \cos \chi, \quad (2.76)$$

por conservación del momento lineal después de un choque elástico, tenemos que

$$\chi = \pi - 2\phi \quad (2.77)$$

donde ϕ es el ángulo entre el momento lineal antes de la colisión de cualquiera de los dos discos y la línea recta que cruza el centro de ambos discos al momento de la colisión.

Usando de (2.55) a (2.62), el vector posición y el vector velocidad de cada disco antes de la colisión, respecto al sistema de laboratorio, son

$$\mathbf{r}_1(t) = \left\langle a_2 t + a_0, -\frac{g}{2} t^2 + a_3 t + a_1 \right\rangle \quad (2.78)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \left\langle b_2 t + b_0, -\frac{g}{2} t^2 + b_3 t + b_1 \right\rangle \quad (2.79)$$

$$\mathbf{v}_1(t) = \left\langle a_2, -gt + a_3 \right\rangle \quad (2.80)$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \left\langle b_2, -gt + b_3 \right\rangle \quad (2.81)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t) = \left\langle a_2 - b_2, a_3 - b_3 \right\rangle \quad (2.82)$$

Se notá que $\mathbf{v}(t)$ es constante, además

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \quad (2.83)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \left\langle k_1, k_2 \right\rangle \quad (2.84)$$

donde

$$k_1 = \frac{a_2 - b_2}{\sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}} \quad (2.85)$$

$$k_2 = \frac{a_3 - b_3}{\sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}} \quad (2.86)$$

Luego, el ángulo entre $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{v}}_*$ ya se conoce y es “ $\chi = \pi - 2\phi$ ”; entonces

$$\hat{\mathbf{v}}_* = \mathbf{M}_\chi \hat{\mathbf{v}} = \langle k_1 \cos \chi - k_2 \sin \chi, k_1 \sin \chi + k_2 \cos \chi \rangle \quad (2.87)$$

Entonces, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mu v \hat{\mathbf{v}}_* &= \mu v \langle k_1 \cos \chi - k_2 \sin \chi, k_1 \sin \chi + k_2 \cos \chi \rangle \\ &= \mu \langle (a_2 - b_2) \cos \chi - (a_3 - b_3) \sin \chi, (a_2 - b_2) \sin \chi + (a_3 - b_3) \cos \chi \rangle \end{aligned} \quad (2.88)$$

Luego, la velocidad del centro de masa desde el sistema de laboratorio es

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_2 \quad (2.89)$$

Entonces de (2.80) y (2.81)

$$\mathbf{V} = \left\langle \frac{m_1 a_2 + m_2 b_2}{m_1 + m_2}, -gt + \frac{m_1 a_3 + m_2 b_3}{m_1 + m_2} \right\rangle \quad (2.90)$$

Luego de (2.24) y (2.25)

$$\mathbf{v}_{*1} = \mathbf{V} + \frac{\mu}{m_1} v \hat{\mathbf{v}}_* \quad (2.91)$$

$$\mathbf{v}_{*2} = \mathbf{V} - \frac{\mu}{m_2} v \hat{\mathbf{v}}_* \quad (2.92)$$

Por lo tanto el vector velocidad de cada uno de los discos después de la colisión, en el sistema de laboratorio, es

$$\mathbf{v}_{*1} = \left\langle \varepsilon_0 + \frac{\mu\chi_0}{m_1}, -gt + \varepsilon_1 + \frac{\mu\chi_1}{m_1} \right\rangle \quad (2.93)$$

$$\mathbf{v}_{*2} = \left\langle \varepsilon_0 - \frac{\mu\chi_0}{m_2}, -gt + \varepsilon_1 - \frac{\mu\chi_1}{m_2} \right\rangle \quad (2.94)$$

Donde

$$\varepsilon_0 = \frac{m_1 a_2 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} \quad (2.95)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{m_1 a_3 + m_2 b_3}{m_1 + m_2} \quad (2.96)$$

$$\chi_0 = (a_2 - b_2)\cos\chi - (a_3 - b_3)\sen\chi \quad (2.97)$$

$$\chi_1 = (a_2 - b_2)\sen\chi + (a_3 - b_3)\cos\chi \quad (2.98)$$

Entonces, el vector posición de cada uno de los discos después de la colisión, en el sistema de laboratorio, es

$$\mathbf{r}_{*1} = \left\langle \left[\varepsilon_0 + \frac{\mu\chi_0}{m_1} \right] t + f_0, -\frac{g}{2}t^2 + \left[\varepsilon_1 + \frac{\mu\chi_1}{m_1} \right] t + f_1 \right\rangle \quad (2.99)$$

$$\mathbf{r}_{*2} = \left\langle \left[\varepsilon_0 - \frac{\mu\chi_0}{m_2} \right] t + h_0, -\frac{g}{2}t^2 + \left[\varepsilon_1 - \frac{\mu\chi_1}{m_2} \right] t + h_1 \right\rangle \quad (2.100)$$

2.1.2. Colisión Elástica de un disco rígido contra una pared en \mathbb{R}^2 .

En esta sección se vera como proceder en el caso de que una partícula clásica colisione contra una pared, con *partícula* nos estaremos refiriendo nuevamente a un disco rígido y el vector posición de la partícula será el vector posición del centro del disco rígido.

Como un primer caso para la pared, idealicemos a la pared como inamovible y definida por algún segmento de cierta longitud “ ℓ_0 ” de alguna línea recta definida por algun par de puntos de \mathbb{R}^2 . *Considerando como sistema total estudiado en la colisión **únicamente** a la partícula*, después de la colisión de la partícula contra la pared no se conservará el momento lineal. Este caso ideal puede explicarse considerando que el efecto que tendrá la pared sobre la partícula es ejercer un impulso en ella; este impulso “ \mathbf{J} ” se define como

$$\mathbf{J} = \int_{\Delta t} \mathbf{F} dt = \int_{\Delta t} d\mathbf{P} = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) \quad (2.101)$$

donde $\Delta t \ll 1$ segundo y “ $\mathbf{P}(t_2) = P_2 \hat{\mathbf{n}}_*$ ” siendo el momento lineal de la partícula después de la colisión contra la pared y “ $\mathbf{P}(t_1) = P_1 \hat{\mathbf{n}}$ ” el momento lineal de la partícula antes de la colisión contra la pared ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_*$ son vectores unitarios). Se ve claramente en (2.101) que si existe una fuerza impulsiva actuando sobre la partícula durante la colisión, entonces no se conservara el momento lineal. Sin embargo, la conservación de la energía cinética antes y después del choque de una partícula contra una pared, es algo que si seguimos exigiendo.

La naturaleza de la fuerza impulsiva dependerá de la pared en sí; pero en este caso ideal, debido a que se exige la conservación de la energía cinética, necesitamos obligatoriamente la siguiente condición

$$P_1 = P_2 \quad (2.102)$$

ya que se habla de una fuerza impulsiva no nula, necesitamos también que

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}_* \quad (2.103)$$

Con (2.102) y (2.103) queda definida por completa la colisión de un disco rígido contra una pared idealmente inamovible.

Capítulo 3

Un algoritmo computacional para las integrales del movimiento

3.1. Linearización de las ecuaciones del movimiento bajo cualquier sistema coordinado ortogonal.

El motivo de esta sección es ahorrarle a la CPU la mayor cantidad de operaciones posibles, todo lo que podamos simplificar ó trabajar antes de codificarle las ecuaciones del movimiento al CPU o definir el algoritmo, sera de gran ayuda para ahorrar tiempo de cómputo.

Cuando se dice “*las ecuaciones del movimiento optimizadas para su uso en una CPU*”, nos referimos a que las pondremos en una forma que ahorrará tiempo de cómputo.

Ahora, volvamos a las ecuaciones del movimiento en la forma de (1.17).

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{2h_i^2} \sum_j \dot{q}_i^2 (\partial_{q_i} h_j^2) - \left[\frac{2\dot{q}_i}{h_i} \left(\sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} h_i \right) + \frac{\partial_{q_i} V}{mh_i^2} \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Ahora, imaginemos este otro sistema de ecuaciones diferenciales, en forma vectorial y totalmente ajeno a las ecuaciones del movimiento por el momento

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\vec{1} \quad (3.2)$$

Donde “ \mathbf{K} y \mathbf{F} ” son funciones matriciales que dependen únicamente de las coordenadas generalizadas “ q_i ” y no de las velocidades generalizadas “ \dot{q}_i ”. Además, tenemos la siguiente notación

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

¿Podremos poner las ecuaciones del movimiento (3.1), en una forma vectorial como (3.2) ? ; la respuesta es **afirmativa**, mientras hagamos una aproximación que consta de velocidades generalizadas *pequeñas*. Este es el principal objetivo de la presente sección.

Hay dos razones por las cuales se desea poner a las ecuaciones del movimiento en la forma de (3.2), la primera es que este último sistema puede ser convertido en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero adaptado a una forma en la cuál será muy fácil aplicar una linealización del sistema, es de notarse que (3.2) sigue siendo un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal. La segunda razón es, que hay una enorme ventaja en tiempo de cómputo de (3.2) respecto a (3.1) en cuanto a su implementación en algún algoritmo computacional ya con un sistema ortogonal de coordenadas específico $\{q_1, q_2, q_3\}$. Se

mencionará la aproximación cuando sea el momento necesario, por el momento supongamos que la masa es constante y redefinamos el potencial a: $\frac{1}{m}V \longrightarrow V$; entonces, tomando en cuenta que

$$\dot{h}_i = \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} h_i \quad , \quad \partial_{q_i} h_j^2 = 2h_j \partial_{q_i} h_j \quad (3.4)$$

Pongamos (3.1) de la siguiente forma

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{h_i^2} \sum_j \left[\dot{q}_i^2 \left(h_j \partial_{q_i} h_j \right) - 2h_i \dot{q}_i \left(\dot{q}_j \partial_{q_j} h_i \right) - \frac{1}{3} \partial_{q_i} V \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Definamos los siguientes símbolos

$$\beta_{ij} = \dot{q}_i^2 \left(h_j \partial_{q_i} h_j \right) - 2\dot{q}_i \dot{q}_j \left(h_i \partial_{q_j} h_i \right) \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

$$V_{ij} = \frac{1}{3} \partial_{q_i} V \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Hablamos de símbolos, no de tensores, por que por el momento no nos interesan sus propiedades de transformación. Escribamos las ecuaciones del movimiento en una forma vectorial muy compacta

$$\begin{pmatrix} h_1^2 \ddot{q}_1 \\ h_2^2 \ddot{q}_2 \\ h_3^2 \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \beta_{1j} - V_{1j} \\ \beta_{2j} - V_{2j} \\ \beta_{3j} - V_{3j} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Veamos lo siguiente

$$\sum_j \begin{pmatrix} \beta_{1j} - V_{1j} \\ \beta_{2j} - V_{2j} \\ \beta_{3j} - V_{3j} \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \beta_{3j} \end{pmatrix} - \sum_j \begin{pmatrix} V_{1j} \\ V_{2j} \\ V_{3j} \end{pmatrix} \equiv \vec{\beta} - \vec{V} \quad (3.9)$$

Trabajemos un poco en el vector $\vec{\beta}$, expandamos la suma para este vector

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 h_1 \partial_{q_1} h_1 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_1 h_1 \partial_{q_1} h_1 + \dot{q}_1^2 h_2 \partial_{q_1} h_2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 h_1 \partial_{q_2} h_1 + \dot{q}_1^2 h_3 \partial_{q_1} h_3 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 h_1 \partial_{q_3} h_1 \\ \dot{q}_2^2 h_1 \partial_{q_2} h_1 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_1 h_2 \partial_{q_1} h_2 + \dot{q}_2^2 h_2 \partial_{q_2} h_2 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_2 h_2 \partial_{q_2} h_2 + \dot{q}_2^2 h_3 \partial_{q_2} h_3 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 h_2 \partial_{q_3} h_2 \\ \dot{q}_3^2 h_1 \partial_{q_3} h_1 - 2\dot{q}_3 \dot{q}_1 h_3 \partial_{q_1} h_3 + \dot{q}_3^2 h_2 \partial_{q_3} h_2 - 2\dot{q}_3 \dot{q}_2 h_3 \partial_{q_2} h_3 + \dot{q}_3^2 h_3 \partial_{q_3} h_3 - 2\dot{q}_3 \dot{q}_3 h_3 \partial_{q_3} h_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1^2 h_1 \partial_{q_1} h_1 + \dot{q}_1^2 h_2 \partial_{q_1} h_2 + \dot{q}_1^2 h_3 \partial_{q_1} h_3 - 2\dot{q}_1 h_1 \left[\dot{q}_2 \partial_{q_2} h_1 + \dot{q}_3 \partial_{q_3} h_1 \right] \\ -\dot{q}_2^2 h_2 \partial_{q_2} h_2 + \dot{q}_2^2 h_1 \partial_{q_2} h_1 + \dot{q}_2^2 h_3 \partial_{q_2} h_3 - 2\dot{q}_2 h_2 \left[\dot{q}_1 \partial_{q_1} h_2 + \dot{q}_3 \partial_{q_3} h_2 \right] \\ -\dot{q}_3^2 h_3 \partial_{q_3} h_3 + \dot{q}_3^2 h_1 \partial_{q_3} h_1 + \dot{q}_3^2 h_2 \partial_{q_3} h_2 - 2\dot{q}_3 h_3 \left[\dot{q}_1 \partial_{q_1} h_3 + \dot{q}_2 \partial_{q_2} h_3 \right] \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Observemos el término entre corchetes del vector en (3.11) y usemos la regla de la cadena de la siguiente manera

$$\frac{dh_i}{dt} = \sum_j \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} = \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} h_i \quad (3.12)$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1^2 h_1 \partial_{q_1} h_1 + \dot{q}_1^2 h_2 \partial_{q_1} h_2 + \dot{q}_1^2 h_3 \partial_{q_1} h_3 - 2\dot{q}_1 h_1 \left[-\dot{q}_1 \partial_{q_1} h_1 + \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} h_1 \right] \\ -\dot{q}_2^2 h_2 \partial_{q_2} h_2 + \dot{q}_2^2 h_1 \partial_{q_2} h_1 + \dot{q}_2^2 h_3 \partial_{q_2} h_3 - 2\dot{q}_2 h_2 \left[-\dot{q}_2 \partial_{q_2} h_2 + \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} h_2 \right] \\ -\dot{q}_3^2 h_3 \partial_{q_3} h_3 + \dot{q}_3^2 h_1 \partial_{q_3} h_1 + \dot{q}_3^2 h_2 \partial_{q_3} h_2 - 2\dot{q}_3 h_3 \left[-\dot{q}_3 \partial_{q_3} h_3 + \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} h_3 \right] \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1^2 h_1 \partial_{q_1} h_1 + \dot{q}_1^2 h_2 \partial_{q_1} h_2 + \dot{q}_1^2 h_3 \partial_{q_1} h_3 - 2\dot{q}_1 h_1 \left[-\dot{q}_1 \partial_{q_1} h_1 + \dot{h}_1 \right] \\ -\dot{q}_2^2 h_2 \partial_{q_2} h_2 + \dot{q}_2^2 h_1 \partial_{q_2} h_1 + \dot{q}_2^2 h_3 \partial_{q_2} h_3 - 2\dot{q}_2 h_2 \left[-\dot{q}_2 \partial_{q_2} h_2 + \dot{h}_2 \right] \\ -\dot{q}_3^2 h_3 \partial_{q_3} h_3 + \dot{q}_3^2 h_1 \partial_{q_3} h_1 + \dot{q}_3^2 h_2 \partial_{q_3} h_2 - 2\dot{q}_3 h_3 \left[-\dot{q}_3 \partial_{q_3} h_3 + \dot{h}_3 \right] \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 h_1 \partial_{q_1} h_1 + \dot{q}_1^2 h_2 \partial_{q_1} h_2 + \dot{q}_1^2 h_3 \partial_{q_1} h_3 - 2\dot{q}_1 \dot{h}_1 h_1 \\ \dot{q}_2^2 h_1 \partial_{q_2} h_1 + \dot{q}_2^2 h_2 \partial_{q_2} h_2 + \dot{q}_2^2 h_3 \partial_{q_2} h_3 - 2\dot{q}_2 \dot{h}_2 h_2 \\ \dot{q}_3^2 h_1 \partial_{q_3} h_1 + \dot{q}_3^2 h_2 \partial_{q_3} h_2 + \dot{q}_3^2 h_3 \partial_{q_3} h_3 - 2\dot{q}_3 \dot{h}_3 h_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Luego, usemos lo siguiente

$$h_i \partial_\omega h_i = h_i \frac{\partial h_i}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_i^2}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \partial_\omega h_i^2 \quad (3.16)$$

Y expresemos el vector $\vec{\beta}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
2\vec{\beta} &= \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \left[\dot{q}_1 \partial_{q_1} h_1^2 + \dot{q}_1 \partial_{q_1} h_2^2 + \dot{q}_1 \partial_{q_1} h_3^2 - 2\partial_t h_1^2 \right] \\ \dot{q}_2 \left[\dot{q}_2 \partial_{q_2} h_1^2 + \dot{q}_2 \partial_{q_2} h_2^2 + \dot{q}_2 \partial_{q_2} h_3^2 - 2\partial_t h_2^2 \right] \\ \dot{q}_3 \left[\dot{q}_3 \partial_{q_3} h_1^2 + \dot{q}_3 \partial_{q_3} h_2^2 + \dot{q}_3 \partial_{q_3} h_3^2 - 2\partial_t h_3^2 \right] \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \beta_1 \\ \dot{q}_2 \beta_2 \\ \dot{q}_3 \beta_3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \partial_t h_1^2 \\ \dot{q}_2 \partial_t h_2^2 \\ \dot{q}_3 \partial_t h_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} - 2 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{B} - 2\dot{\mathbf{H}}_1) \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \\
\beta_1 &= \dot{q}_1 \left[\partial_{q_1} h_1^2 + \partial_{q_1} h_2^2 + \partial_{q_1} h_3^2 \right] \\
\beta_2 &= \dot{q}_2 \left[\partial_{q_2} h_1^2 + \partial_{q_2} h_2^2 + \partial_{q_2} h_3^2 \right] \\
\beta_3 &= \dot{q}_3 \left[\partial_{q_3} h_1^2 + \partial_{q_3} h_2^2 + \partial_{q_3} h_3^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Si se ponen los términos explícitamente en la matriz \mathbf{B} se sale del margen de la hoja, por eso se optó por ponerse así. Trabajaremos en la matriz “ \mathbf{B} ”, pero primero definamos a las siguientes matrices

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} h_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_1^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} h_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

recordando también la definición de \mathbf{H}_1 en (3.18). Ahora definamos a estas otras matrices

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q}_\partial = \begin{pmatrix} \partial_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{q_3} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Definamos también

$$\mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 \quad , \quad \mathbf{H}_Q = \mathbf{Q}_\partial \mathbf{H}_\omega \quad (3.21)$$

Notesé que “ \mathbf{Q}_∂ ” es una matriz operador. Usando las definiciones en (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21); escribamos la matriz \mathbf{B} de la siguiente forma

$$\mathbf{B} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q \quad (3.22)$$

Entonces, de (3.17), el vector $\vec{\beta}$ puede ser escrito de la siguiente manera

$$\vec{\beta} = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\dot{\mathbf{H}}_1 \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

Los factores de escala “ h_i ” *casi* nunca son igual a “0”, en coordenadas cartesianas los factores de escala son iguales a 1. Por otro lado, las matrices “ \mathbf{H}_i ” son diagonales y su determinante es

el producto de los elementos en su diagonal (de echo los únicos no nulos). Entonces

$$Det[\mathbf{H}_1] = Det[\mathbf{H}_2] = Det[\mathbf{H}_3] = (h_1 h_2 h_3)^2 = D_0 \quad (3.24)$$

Dependiendo del sistema coordenado, puede haber subconjuntos del plano donde $D_0 = 0$; esto es, donde ‘ h_i ’ si sean nulos, por ejemplo en cilíndricas: “ $h_\theta = \rho = 0$, para $\rho = 0$ ”. Al estudiar un sistema mecánico en partícular, el usuario deberá suprimir por su cuenta los puntos donde las coordenadas sean tal, que al menos uno de los factores de escala se anulen, de otro modo el algoritmo computacional que se explica en la siguiente sección falla, pues como se vera a continuación, requerimos que exista la inversa de la matriz \mathbf{H}_1 y si $D_0 = 0$ entonces la matriz no es invertible.

Es virtualmente imposible diseñar un algoritmo que sea capaz de determinar los “ceros” de los factores de escala de manera automática para cualquier sistema coordenado ortogonal. Otro caso es, dado un sistema coordenado en partícular, determinar los “ceros” de los factores de escala. El algoritmo de la siguiente sección le dejará dicho trabajo al usuario, o en su elección, omitir los puntos del plano donde los factores de escala se anulen.

De (3.24) y de lo explicado respecto a los factores de escala, concluimos que \mathbf{H}_1 es invertible y su inversa es

$$\mathbf{H}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Luego, si tenemos que

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

De (3.8), las ecuaciones del movimiento toman la siguiente forma

$$\mathbf{H}_1 \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\dot{\mathbf{H}}_1] \dot{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{V}} \quad (3.27)$$

En (3.9) se define al vector $\vec{\mathbf{V}}$. Entonces

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1^{-1} [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\dot{\mathbf{H}}_1] \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{H}_1^{-1} \vec{\mathbf{V}} \quad (3.28)$$

Ahora definamos a las siguientes matrices

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \partial_{q_1} V & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{q_2} V & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{q_3} V \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Q}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\dot{q}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\dot{q}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\dot{q}_3} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Nuevamente hay que omitir los puntos donde $\text{Det}[\dot{\mathbf{Q}}^{-1}] = 0$ ó donde alguna magnitud de alguna de las velocidades generalizadas se anule. Recordemos que “ \mathbf{V} ” es el potencial total del sistema que se vaya a estudiar. Usando (3.29) podemos poner a las ecuaciones del movimiento de la siguiente forma

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1^{-1} [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} - 2\dot{\mathbf{H}}_1] \dot{\mathbf{q}} \quad (3.30)$$

Es interesante notar que si tenemos un sistema mecánico que queremos estudiar y el origen del marco de referencia que elegimos coincide con el origen en coordenadas cartesianas, entonces (3.30) coincide con las usuales ecuaciones del movimiento de la

mecánica Newtoniana; usando las definiciones en (3.29), (3.25), (3.21), (3.20) y las definiciones de las matrices “ \mathbf{H}_i ” en (3.19) y (3.18);

las ecuaciones del movimiento toman la siguiente forma en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{H}_Q = \dot{\mathbf{H}}_i = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad , \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.31)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \left[\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{0}_{3 \times 3} - 2 \mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} - \mathbf{0}_{3 \times 3} \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (3.32)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{I} \mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{I} \mathbf{V} \vec{\mathbf{1}} = -\vec{\mathbf{V}} \quad (3.33)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix} \quad \ddot{\mathbf{r}}_c = -\nabla V(x, y, z) \quad (3.34)$$

Ha llegado el momento de hacer nuestra primera “*aproximación teórica*”, osea, sin tomar en cuenta que el algoritmo computacional de la siguiente sección aproxima las soluciones como series de potencias truncadas.

Hay límites para lo que una computadora puede hacer, ya sea simbólicamente ó numéricamente. Las ecuaciones del movimiento fueron puestas en la forma de (3.30) para un manejo más eficiente del álgebra, pero siguen siendo las mismas ecuaciones del movimiento que en (3.1), las cuales son muy complejas para ser resueltas de forma cerrada en la mayoría de los casos y sistemas coordenados.

La aproximación que asumiremos es la siguiente: **la velocidad del objeto representado por las coordenadas generalizadas es muy pequeña, y por lo tanto $\dot{q}_i < 1m/s$** . Más adelante haremos uso de la aproximación.

Algo importante es que el producto de matrices diagonales es conmutable; el objeto que esta entre paréntesis rectangulares en la relación (3.30) es una matriz diagonal, también lo es \mathbf{H}_1^{-1} , por lo tanto, podemos multiplicar (3.30) por la izquierda con $\dot{\mathbf{Q}}^{-1}$ de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{Q}}^{-1} \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{H}_1^{-1} [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} - 2\dot{\mathbf{H}}_1] \dot{\mathbf{q}} \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}^{-1} \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1^{-1} [\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} - 2\dot{\mathbf{H}}_1] \vec{1} \quad (3.36)$$

Veamos lo siguiente

$$\frac{d(\text{Ln}[f(x)])}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df}{dx} \quad (3.37)$$

Entonces

$$\frac{\ddot{q}_i}{\dot{q}_i} = \frac{1}{\dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \frac{d(\text{Ln}[\dot{q}_i])}{dt} \quad (3.38)$$

Ahora veamos el siguiente objeto

$$\dot{\mathbf{Q}}^{-1} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\ddot{q}_1}{\dot{q}_1} \\ \frac{\ddot{q}_2}{\dot{q}_2} \\ \frac{\ddot{q}_3}{\dot{q}_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \text{Ln}[\dot{q}_1] \\ \text{Ln}[\dot{q}_2] \\ \text{Ln}[\dot{q}_3] \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

La función logaritmo natural tiene una expansión en serie de potencias de la siguiente manera

$$Ln(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (x-1)^k \quad x \in (0, 2) \quad (3.40)$$

Por lo tanto, para nuestra aproximación: $0m/s < \dot{q}_i < 1m/s$ y el término “ $Ln[q_i]$ ”, se puede usar la expansión de (3.40). Pero, digamos que las velocidades generalizadas son lo suficientemente pequeñas como para poder aproximar términos cuadráticos con términos lineales “ $\dot{q}_i^2 \approx \dot{q}_i$ ”. En otras palabras, una aproximación pequeña, pero no lo suficiente como para despreciar por completo el término cuadrático “ \dot{q}_i^2 ”, por lo tanto

$$Ln(\dot{q}_i) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\dot{q}_i - 1)^k \approx (\dot{q}_i - 1) - \frac{1}{2}(\dot{q}_i^2 - 4\dot{q}_i + 4) \approx \frac{3}{2}\dot{q}_i - \frac{3}{2} \quad (3.41)$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathbf{Q}}^{-1} \ddot{\mathbf{q}} \approx \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}\dot{q}_1 - \frac{3}{2} \right) \\ \left(\frac{3}{2}\dot{q}_2 - \frac{3}{2} \right) \\ \left(\frac{3}{2}\dot{q}_3 - \frac{3}{2} \right) \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.42)$$

De (3.30) y con la aproximación “ $\dot{q}_i^2 \approx \dot{q}_i$ ó (3.42)”; recordando que las matrices diagonales tienen producto conmutativo, las ecuaciones del movimiento toman la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{Q}}^{-1} \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1^{-1} \left[\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q - 2\mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} - 2\dot{\mathbf{H}}_1 \right] \dot{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.43)$$

$$3\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_1^{-1} \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_Q \vec{1} - 2\mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{V} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} \vec{1} - 2\mathbf{H}_1^{-1} \dot{\mathbf{H}}_1 \vec{1} \quad (3.44)$$

Notemos, que usando $\dot{q}_i^2 \approx \dot{q}_i$, de (3.20) tenemos lo siguiente

$$\dot{Q}^2 \approx \dot{Q} \quad , \quad \dot{q}_i \ddot{q}_i = \dot{q}_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}_i^2}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \ddot{q}_i \quad (3.45)$$

Entonces, de (3.44) y (3.45), veamos que

$$3H_1 \dot{Q} \ddot{q} = H_1 H_1^{-1} \dot{Q}^2 H_Q \vec{1} - 2H_1 H_1^{-1} V \dot{Q} \dot{Q}^{-1} \vec{1} - 2\dot{Q} H_1 H_1^{-1} \dot{H}_1 \vec{1} \quad (3.46)$$

$$\frac{3}{2} H_1 \ddot{q} = \dot{Q} H_Q \vec{1} - 2V \vec{1} - 2\dot{Q} \dot{H}_1 \vec{1} \quad (3.47)$$

$$3H_1 \ddot{q} = \left[2H_Q - 4\dot{H}_1 \right] \dot{q} - 4V \vec{1} \quad (3.48)$$

Expandiendo el sistema de ecuaciones diferenciales, tenemos que

$$\begin{aligned} 3h_1^2 \ddot{q}_1 &= \left[2\partial_{q_1}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_1^2 \right] \dot{q}_1 - 4\partial_{q_1} V \\ 3h_2^2 \ddot{q}_2 &= \left[2\partial_{q_2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_2^2 \right] \dot{q}_2 - 4\partial_{q_2} V \\ 3h_3^2 \ddot{q}_3 &= \left[2\partial_{q_3}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_3^2 \right] \dot{q}_3 - 4\partial_{q_3} V \end{aligned} \quad (3.49)$$

Usando nuevamente la aproximación (3.42), pongamos a las ecuaciones del movimiento de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
3h_1^2 \frac{\ddot{q}_1}{\dot{q}_1} &= \frac{15}{2} h_1^2 \ddot{q}_1 = \left[2\partial_{q_1}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_1^2 \right] - 4\frac{1}{\dot{q}_1} \partial_{q_1} V \\
3h_2^2 \frac{\ddot{q}_2}{\dot{q}_2} &= \frac{15}{2} h_2^2 \ddot{q}_2 = \left[2\partial_{q_2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_2^2 \right] - 4\frac{1}{\dot{q}_2} \partial_{q_2} V \\
3h_3^2 \frac{\ddot{q}_3}{\dot{q}_3} &= \frac{15}{2} h_3^2 \ddot{q}_3 = \left[2\partial_{q_3}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_3^2 \right] - 4\frac{1}{\dot{q}_3} \partial_{q_3} V
\end{aligned} \tag{3.50}$$

La función “ $f(x) = \frac{1}{x}$ ” tiene una expansión en serie de potencias de la siguiente manera

$$\frac{1}{x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (-1+x)^k \quad x \in (0, 1] \tag{3.51}$$

Por lo tanto, para nuestra aproximación: $0m/s < \dot{q}_i < 1m/s$ se puede usar la expansión de (3.51)

Entonces

$$\frac{1}{\dot{q}_i} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (-1 + \dot{q}_i)^k \approx (2 - \dot{q}_i) \quad \dot{q}_i \in (0, 1] \tag{3.52}$$

Y las ecuaciones del movimiento toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{15}{2} h_1^2 \ddot{q}_1 &= \left[2\partial_{q_1}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_1^2 \right] + 4\dot{q}_1 \partial_{q_1} V - 8\partial_{q_1} V \\
\frac{15}{2} h_2^2 \ddot{q}_2 &= \left[2\partial_{q_2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_2^2 \right] + 4\dot{q}_2 \partial_{q_2} V - 8\partial_{q_2} V \\
\frac{15}{2} h_3^2 \ddot{q}_3 &= \left[2\partial_{q_3}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 4\dot{h}_3^2 \right] + 4\dot{q}_3 \partial_{q_3} V - 8\partial_{q_3} V
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Las ecuaciones del movimiento en (3.53) tienen casi la misma forma deseada que (3.2), excepto por los términos “ $\dot{h}_i^2 = \partial_t(h_i^2)$ ”, que en general serán funciones de las coordenadas y de las velocidades generalizadas; aún no es visible que (3.53) tenga la misma forma que (3.2), pero **si la tiene**. Recordando que las funciones coordenadas son las coordenadas cartesianas como funciones de “ $\{q_1, q_2, q_3\}$ ”, prestemosle atención al siguiente término

$$\dot{h}_i^2 = \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \vec{r}_c}{\partial q_i} \right\|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 \quad (3.54)$$

$$\dot{h}_i^2 = 2 \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \quad , \quad k = 1, 2, 3. \quad , \quad x_k = x, y, z. \quad (3.55)$$

Y aquí el paso crucial: “*supongamos que las funciones coordenadas son de clase \mathcal{C}^1 y que las velocidades generalizadas también son funciones continuas.*”

Entonces, estamos realmente usando 2 restricciones, ***velocidades generalizadas pequeñas y funciones coordenadas con derivadas parciales continuas***. Será importante recordar, que el algoritmo y la presente tesis están diseñados solo para sistemas mecánicos que hagan uso de un sistema coordinado con estas características. Siendo de esta manera, podemos poner (3.55) de la siguiente manera

$$\dot{h}_i^2 = 2 \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right) \quad (3.56)$$

Desarrollando más a (3.56) y usando la regla de la cadena para las funciones coordenadas “ $x_k(q_1, q_2, q_3)$ ”, tenemos lo siguiente

$$\dot{h}_i^2 = 2 \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum_j \frac{\partial q_j}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right] , \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.57)$$

$$\dot{h}_i^2 = 2 \sum_{k,j} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\dot{q}_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right] \quad (3.58)$$

$$\dot{h}_i^2 = 2 \sum_{k,j} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \left[\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \dot{q}_j \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j} \right] \right) \quad (3.59)$$

$$\dot{h}_i^2 = 2 \sum_{k,j} \dot{q}_j \left[\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j} \right] \quad (3.60)$$

Si definimos que

$$x_{ki} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \quad (3.61)$$

Entonces, haciendo uso de que las funciones x_k son de clase \mathcal{C}^1 , tenemos que

$$\dot{h}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j} \dot{q}_j \left[x_{ki} \frac{\partial x_{ki}^2}{\partial q_j} \right] \quad (3.62)$$

Se incluye en el apéndice (B.1), una demostración de que (3.55) y (3.62) son idénticos para 3 de los sistemas coordenados ortogonales más usados: *coordenadas cartesianas*, *coordenadas cilíndricas* y *coordenadas esféricas*.

El término “ \dot{h}_i^2 ” (3.62) aparece en cada una de las 3 ecuaciones del movimiento de manera independiente, salvo por el

“−4” que lo esta multiplicando. En (3.62) ya se alcanzan a ver parte de los términos matriciales que andamos buscando. Expandamos “ \dot{h}_i^2 ” como si fueran los únicos integrantes de las 3 ecuaciones del movimiento, para apreciar bien el término matricial

$$\begin{aligned}\dot{h}_1^2 &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\dot{q}_1 \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_3} \right] \\ \dot{h}_2^2 &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\dot{q}_1 \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_3} \right] \\ \dot{h}_3^2 &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\dot{q}_1 \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_3} \right]\end{aligned}\tag{3.63}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1^2 \\ \dot{h}_2^2 \\ \dot{h}_3^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_k \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}\tag{3.64}$$

Volvamos a (3.53), pero reescribamos las ecuaciones del movimiento de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
15h_1^2\ddot{q}_1 &= \left[8\dot{q}_1\partial_{q_1}V - 8\dot{h}_1^2\right] + \left[4\partial_{q_1}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 16\partial_{q_1}V\right] \\
15h_2^2\ddot{q}_2 &= \left[8\dot{q}_2\partial_{q_2}V - 8\dot{h}_2^2\right] + \left[4\partial_{q_2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 16\partial_{q_2}V\right] \\
15h_3^2\ddot{q}_3 &= \left[8\dot{q}_3\partial_{q_3}V - 8\dot{h}_3^2\right] + \left[4\partial_{q_3}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 16\partial_{q_3}V\right]
\end{aligned}
\tag{3.65}$$

Definamos a las siguientes matrices

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(q_1, q_2, q_3) &= \begin{pmatrix} \frac{8}{15h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{15h_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15h_3^2} \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}(q_1, q_2, q_3) &= \begin{pmatrix} \partial_{q_1} V & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{q_2} V & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{q_3} V \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\mathbf{K}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2} \sum_k \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{U}(q_1, q_2, q_3) - \mathbf{K}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\mathbf{F}(q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

$$\text{donde : } F_i = \frac{4}{15h_i^2} \partial_{q_i} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 4V)$$

Es importante notar que las matrices “ $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{J} y \mathbf{F} ” no dependen de las velocidades generalizadas.

De (3.65), (3.66) y (3.67); sea $\mathbf{M} = \mathbf{\Omega J}$, las ecuaciones del movimiento toman la siguiente forma

$$\ddot{\vec{q}} = \mathbf{\Omega J} \dot{\vec{q}} + \mathbf{F} \vec{1} \quad (3.68)$$

$$\ddot{\vec{q}} = \mathbf{M} \dot{\vec{q}} + \mathbf{F} \vec{1} \quad (3.69)$$

Las ecuaciones del movimiento en (3.68) y (3.69) tienen un equivalente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, hagamos las siguientes sustituciones

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$\vec{E}(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathbf{M}\vec{\varepsilon} + \mathbf{F}\vec{1} \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

$$\vec{\zeta}(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a (3.68), es

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \vec{\zeta}(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (3.74)$$

Se hizo una gran simplificación, sin embargo las ecuaciones del movimiento en la forma de (3.68) ó (3.74), es un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, pero no lineal y difícil de resolver; la ecuación diferencial es respecto al tiempo y los coeficientes matriciales son funciones de las coordenadas, no del tiempo. Vamos a aproximar el sistema, aplicando una linealización de (3.74), pero hay que ir definiendo una serie de conceptos y enunciar un importante teorema al mismo tiempo³.

Definición 1 *Punto fijo.*

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden como

(3.74),
si: $\exists \zeta_0 = (\zeta_{1_0}, \zeta_{2_0}, \zeta_{3_0}, \zeta_{4_0}, \zeta_{5_0}, \zeta_{6_0}) \ni \vec{\zeta}(\zeta_0) = \mathbf{0}$; entonces “ ζ_0 ” es un punto fijo de (3.74).

Si el sistema mecánico original de segundo orden tiene la posición inicial

$\vec{q} = (a_0, b_0, c_0)$; entonces de (3.67), (3.71), (3.72) y (3.73), se ve que el sistema (3.74) tiene el siguiente punto fijo

$$\zeta_0 = (a_0, b_0, c_0, 0, 0, 0) \quad , \quad \vec{\zeta}(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \vec{\zeta}(\zeta_0) = \vec{0} \quad (3.75)$$

Recordando que debemos evitar usar condiciones iniciales, así como restringir el análisis del sistema, donde los factores de escala se anulen, por ejemplo, uno de los factores de escala en coordenadas cilíndricas se anula en el origen.

Ahora hagamos una expansión de Taylor a primer orden alrededor del punto fijo, de los campos escalares en $\mathbb{R}^6 \zeta_i(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$,⁴, del sistema (3.74), para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\zeta_i(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \zeta_i(\zeta_0) + \sum_{k=1}^{k=6} \eta_k \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k}(\zeta_0) , \text{ tal que :}$$

$$\eta_k = q_1 , q_2 , q_3 , \varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3 . \text{ Para } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.76)$$

Por lo tanto

$$\zeta_1(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \varepsilon_1 \quad (3.77)$$

$$\zeta_2(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \varepsilon_2 \quad (3.78)$$

$$\zeta_3(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \varepsilon_3 \quad (3.79)$$

$$\zeta_4(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \sum_{k=1}^{k=6} \eta_k \frac{\partial \zeta_4}{\partial \eta_k}(\zeta_0) \quad (3.80)$$

$$\zeta_5(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \sum_{k=1}^{k=6} \eta_k \frac{\partial \zeta_5}{\partial \eta_k}(\zeta_0) \quad (3.81)$$

$$\zeta_6(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \sum_{k=1}^{k=6} \eta_k \frac{\partial \zeta_6}{\partial \eta_k}(\zeta_0) \quad (3.82)$$

Necesitaremos varios términos, empecemos con los siguientes

$$h_i^2 = \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 = \sum_k \left(x_{ki} \right)^2 \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\vec{\varepsilon} &= [\mathbf{U} - \mathbf{K}] \mathbf{J}\vec{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{8}{15} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \frac{\partial_{q_1} V}{h_1^2} \\ \varepsilon_2 \frac{\partial_{q_2} V}{h_2^2} \\ \varepsilon_3 \frac{\partial_{q_3} V}{h_3^2} \end{pmatrix} - \frac{4}{15} \sum_k \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1}{h_1^2} \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_2^2} \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_2} + \frac{\varepsilon_3}{h_3^2} \frac{\partial x_{k1}^2}{\partial q_3} \\ \frac{\varepsilon_1}{h_1^2} \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_2^2} \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_2} + \frac{\varepsilon_3}{h_3^2} \frac{\partial x_{k2}^2}{\partial q_3} \\ \frac{\varepsilon_1}{h_1^2} \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_2^2} \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_2} + \frac{\varepsilon_3}{h_3^2} \frac{\partial x_{k3}^2}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad (3.84)
\end{aligned}$$

$$M_i = \frac{8}{15h_i^2} \partial_{q_i} V - \frac{4}{15} \sum_j \frac{\varepsilon_j}{h_j^2} \frac{\partial h_i^2}{\partial q_j}$$

Entonces, de (3.67)

$$E_i = M_i + F_i = \frac{8}{15h_i^2} \partial_{q_i} V - \frac{4}{15} \sum_j \frac{\varepsilon_j}{h_j^2} \frac{\partial h_i^2}{\partial q_j} + \frac{4}{15h_i^2} \partial_{q_i} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 4V)$$

$$E_i = \frac{4}{15h_i^2} \partial_{q_i} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2V) - \frac{4}{15} \sum_j \frac{\varepsilon_j}{h_j^2} \frac{\partial h_i^2}{\partial q_j} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{4}{15h_1^2} \partial_{q_1} \left([1 - \varepsilon_1] h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2V \right) - \frac{4}{15} \left[\frac{\varepsilon_2}{h_2^2} \frac{\partial h_1^2}{\partial q_2} + \frac{\varepsilon_3}{h_3^2} \frac{\partial h_1^2}{\partial q_3} \right] \\
E_2 &= \frac{4}{15h_2^2} \partial_{q_2} \left(h_1^2 + [1 - \varepsilon_2] h_2^2 + h_3^2 - 2V \right) - \frac{4}{15} \left[\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} \frac{\partial h_2^2}{\partial q_1} + \frac{\varepsilon_3}{h_3^2} \frac{\partial h_2^2}{\partial q_3} \right] \\
E_3 &= \frac{4}{15h_3^2} \partial_{q_3} \left(h_1^2 + h_2^2 + [1 - \varepsilon_3] h_3^2 - 2V \right) - \frac{4}{15} \left[\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} \frac{\partial h_3^2}{\partial q_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_2^2} \frac{\partial h_3^2}{\partial q_2} \right]
\end{aligned} \tag{3.86}$$

De acuerdo a la expansión de Taylor (3.76) y a las expresiones (3.77)-(3.82)

$$\zeta_i(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \sum_{r=1}^{r=3} \left[q_r \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r}(\zeta_0) + \varepsilon_r \frac{\partial \zeta_i}{\partial \varepsilon_r}(\zeta_0) \right] \tag{3.87}$$

$$q_r = q_1, q_2, q_3.$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3.$$

necesitamos derivar las cantidades $\zeta_i = E_i$, $i = 4, 5, 6$; respecto

a “ ε_r y q_r ”. Primero listemos unas cantidades y notación útiles, haciendo uso de esta otra abreviación: $x_{ki} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}$

$$\partial_{q_j} \left(h_i^{-2} \right) = -2 \frac{\partial_{q_j} h_i}{h_i^3} = -4 \frac{\sum_k x_{ki} \left(\partial_{q_j} x_{ki} \right)}{\left(\sum_k x_{ki}^2 \right)^2} \equiv D_{ji}^{-2} \tag{3.88}$$

$$\partial_{q_j} \left(h_i^2 \right) = \partial_{q_j} \left(\sum_k x_{ki}^2 \right) \equiv D_{ji}^2 \tag{3.89}$$

$$\partial_{q_r} \partial_{q_j} (h_i^2) = \partial_{q_r} \partial_{q_j} \left(\sum_k x_{ki}^2 \right) \equiv D_{rji}^2 \quad (3.90)$$

$$G_1 = \left([1 - \varepsilon_1] h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2V \right) \quad (3.91)$$

$$G_2 = \left(h_1^2 + [1 - \varepsilon_2] h_2^2 + h_3^2 - 2V \right) \quad (3.92)$$

$$G_3 = \left(h_1^2 + h_2^2 + [1 - \varepsilon_3] h_3^2 - 2V \right) \quad (3.93)$$

Notesé que al derivar $\zeta_i = E_i$, $i = 4, 5, 6$, respecto a q_j ; aparecerán las cantidades G_i y las podremos poner en término de estas otras cantidades D_{ji}^2 y D_{rji}^2 . Después de derivar ζ_i , necesitamos evaluar esta derivada en el punto fijo ζ_0 ; pero esta evaluación solo se puede hacer especificando de manera explícita los factores de escala, en otras palabras, ya que el usuario elija un sistema coordinado ortogonal.

Cuando el algoritmo que se explicará en la siguiente sección se ejecute mediante un programa de C++, se hará la evaluación totalmente en términos de D_{ji}^{-2} , D_{ji}^2 y D_{rji}^2 y del término potencial restante. Por lo pronto, se dejará expresada cada derivada de los campos escalares ζ_i en la forma idéntica que tomará el algoritmo para su posterior evaluación en el punto fijo, acto seguido el algoritmo desarrollara la serie de Taylor de primer orden y obtendrá el sistema lineal asociado a (3.74).

Un detalle de suma importancia, el algoritmo obtendrá las integrales del movimiento mediante una linealización del sistema original **únicamente** cuando el punto fijo sea un punto de equilibrio estable, de acuerdo a un resultado derivado del teorema de Lyapunov, esto se cumple si la matriz Jacobiana del sistema tiene eigenvalores estrictamente con parte real negativa.

Supongamos que \mathbf{J}_0 es la matriz jacobiana evaluada en el punto fijo de la transformación vectorial $\vec{\zeta}(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ del sistema no lineal (3.74), digamos que $\vec{\zeta}$ es de clase C^1 . Digamos que el sistema lineal asociado a (3.74), es

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{J}_0 \vec{x} \quad (3.94)$$

Teorema 3 *Si la matriz \mathbf{J}_0 en (3.94) tiene todos sus eigenvalores con parte real estrictamente negativa, entonces el punto fijo es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema no lineal (3.74).*

El **Teorema 1** es un caso particular del teorema de Poincaré-Lyapunov, se cita una referencia a la demostración de este último [?]

Teorema 4 *Teorema de Poincaré-Lyapunov.*

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales como (3.74). Si los eigenvalores de la matriz Jacobiana de la transformación $\vec{\zeta}$ evaluada en un punto fijo no son iguales a cero ó idénticamente números imaginarios puros, entonces las trayectorias del sistema no lineal respecto al punto fijo se comportan de manera similar a las trayectorias del sistema lineal asociado.

Esto es, si no se cumplen las condiciones del **Teorema 1**; no podremos asegurar que nuestro sistema de ecuaciones diferencial linealizado sea una buena aproximación del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal. Cuando **no se cumplan las condiciones del teorema**, el algoritmo trabajará con el sistema no lineal directamente, obtendrá las integrales del movimiento mediante una expansión en series de potencias de las coordenadas generalizadas respecto al tiempo; esto es, se asumirá analiticidad de las coordenadas generalizadas.

Ahora las derivadas que necesitamos

$$\begin{aligned} \partial_{q_1} E_1 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_1} G_1 \left(D_{11}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_1 q_1}^2 G_1}{h_1^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_2 \left(D_{21}^2 D_{12}^{-2} + \frac{D_{121}^2}{h_2^2} \right) - \varepsilon_3 \left(D_{31}^2 D_{13}^{-2} + \frac{D_{131}^2}{h_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_2} E_1 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_1} G_1 \left(D_{21}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_2 q_1}^2 G_1}{h_1^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_2 \left(D_{21}^2 D_{22}^{-2} + \frac{D_{221}^2}{h_2^2} \right) - \varepsilon_3 \left(D_{31}^2 D_{23}^{-2} + \frac{D_{231}^2}{h_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_3} E_1 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_1} G_1 \left(D_{31}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_3 q_1}^2 G_1}{h_1^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_2 \left(D_{21}^2 D_{32}^{-2} + \frac{D_{321}^2}{h_2^2} \right) - \varepsilon_3 \left(D_{31}^2 D_{33}^{-2} + \frac{D_{331}^2}{h_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_1} E_2 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_2} G_2 \left(D_{12}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_1 q_2}^2 G_2}{h_2^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_1 \left(D_{12}^2 D_{11}^{-2} + \frac{D_{112}^2}{h_1^2} \right) - \varepsilon_3 \left(D_{32}^2 D_{13}^{-2} + \frac{D_{132}^2}{h_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_2} E_2 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_2} G_2 \left(D_{22}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_2 q_2}^2 G_2}{h_2^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_1 \left(D_{12}^2 D_{21}^{-2} + \frac{D_{212}^2}{h_1^2} \right) - \varepsilon_3 \left(D_{32}^2 D_{23}^{-2} + \frac{D_{232}^2}{h_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_3} E_2 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_2} G_2 \left(D_{32}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_3 q_2}^2 G_2}{h_2^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_1 \left(D_{12}^2 D_{31}^{-2} + \frac{D_{312}^2}{h_1^2} \right) - \varepsilon_3 \left(D_{32}^2 D_{33}^{-2} + \frac{D_{332}^2}{h_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_1} E_3 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_3} G_3 \left(D_{13}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_1 q_3}^2 G_3}{h_3^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_1 \left(D_{13}^2 D_{11}^{-2} + \frac{D_{113}^2}{h_1^2} \right) - \varepsilon_2 \left(D_{23}^2 D_{12}^{-2} + \frac{D_{123}^2}{h_2^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_2} E_3 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_3} G_3 \left(D_{23}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_2 q_3}^2 G_3}{h_3^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_1 \left(D_{13}^2 D_{21}^{-2} + \frac{D_{213}^2}{h_1^2} \right) - \varepsilon_2 \left(D_{23}^2 D_{22}^{-2} + \frac{D_{223}^2}{h_2^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q_3} E_3 &= \frac{4}{15} \left[\partial_{q_3} G_3 \left(D_{33}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_3 q_3}^2 G_3}{h_3^2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \varepsilon_1 \left(D_{13}^2 D_{31}^{-2} + \frac{D_{313}^2}{h_1^2} \right) - \varepsilon_2 \left(D_{23}^2 D_{32}^{-2} + \frac{D_{323}^2}{h_2^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\partial_{\varepsilon_1} E_1 = \frac{-4}{15 h_1^2} \partial_{q_1} h_1^2 \quad (3.104)$$

$$\partial_{\varepsilon_2} E_1 = \frac{-4}{15 h_2^2} \partial_{q_2} h_1^2 \quad (3.105)$$

$$\partial_{\varepsilon_3} E_1 = \frac{-4}{15 h_3^2} \partial_{q_3} h_1^2 \quad (3.106)$$

$$\partial_{\varepsilon_1} E_2 = \frac{-4}{15h_1^2} \partial_{q_1} h_2^2 \quad (3.107)$$

$$\partial_{\varepsilon_2} E_2 = \frac{-4}{15h_2^2} \partial_{q_2} h_2^2 \quad (3.108)$$

$$\partial_{\varepsilon_3} E_2 = \frac{-4}{15h_3^2} \partial_{q_3} h_2^2 \quad (3.109)$$

$$\partial_{\varepsilon_1} E_3 = \frac{-4}{15h_1^2} \partial_{q_1} h_3^2 \quad (3.110)$$

$$\partial_{\varepsilon_2} E_3 = \frac{-4}{15h_2^2} \partial_{q_2} h_3^2 \quad (3.111)$$

$$\partial_{\varepsilon_3} E_3 = \frac{-4}{15h_3^2} \partial_{q_3} h_3^2 \quad (3.112)$$

Usando (3.88)-(3.112), se evaluará la expansión de Taylor a primer orden de (3.80), (3.81) y (3.82); mediante (3.87); la expansión de (3.77), (3.78) y (3.79) ya esta simplificada.

Recordando que el punto fijo es “ $\zeta_0 = (a_0, b_0, c_0, 0, 0, 0)$ ”, podemos simplificar aún más las expresiones (3.95) a (3.103), evaluando para las ε_i , dejando solo pendientes las q_i , las cuáles se evaluarán para cada sistema diferente al momento de la simulación que quiera hacer el usuario y de acuerdo a sus condiciones iniciales

$$\partial_{q_1} E_1 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_1} G_1 \left(D_{11}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_1 q_1}^2 G_1}{h_1^2} \right] \quad (3.113)$$

$$\partial_{q_2} E_1 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_1} G_1 \left(D_{21}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_2 q_1}^2 G_1}{h_1^2} \right] \quad (3.114)$$

$$\partial_{q_3} E_1 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_1} G_1 \left(D_{31}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_3 q_1}^2 G_1}{h_1^2} \right] \quad (3.115)$$

$$\partial_{q_1} E_2 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_2} G_2 \left(D_{12}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_1 q_2}^2 G_2}{h_2^2} \right] \quad (3.116)$$

$$\partial_{q_2} E_2 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_2} G_2 \left(D_{22}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_2 q_2}^2 G_2}{h_2^2} \right] \quad (3.117)$$

$$\partial_{q_3} E_2 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_2} G_2 \left(D_{32}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_3 q_2}^2 G_2}{h_2^2} \right] \quad (3.118)$$

$$\partial_{q_1} E_3 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_3} G_3 \left(D_{13}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_1 q_3}^2 G_3}{h_3^2} \right] \quad (3.119)$$

$$\partial_{q_2} E_3 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_3} G_3 \left(D_{23}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_2 q_3}^2 G_3}{h_3^2} \right] \quad (3.120)$$

$$\partial_{q_3} E_3 = \frac{4}{15} \left[\partial_{q_3} G_3 \left(D_{33}^{-2} \right) + \frac{\partial_{q_3 q_3}^2 G_3}{h_3^2} \right] \quad (3.121)$$

Donde después de evaluar $\varepsilon_i = 0$, las G_i valen lo mismo (3.91)-(3.93)

$$G_1 = G_2 = G_3 = \left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2V \right) \quad (3.122)$$

De (3.87), las expansiones de Taylor para los campos escalares ζ_4 , ζ_5 , y ζ_6 , son

$$\begin{aligned} \zeta_4(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= q_1 \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_1}(\zeta_0) + q_2 \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_2}(\zeta_0) + q_3 \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_3}(\zeta_0) \cdots \\ &\cdots + \varepsilon_1 \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) + \varepsilon_2 \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) + \varepsilon_3 \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_5(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= q_1 \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_1}(\zeta_0) + q_2 \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_2}(\zeta_0) + q_3 \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_3}(\zeta_0) \cdots \\
&\cdots + \varepsilon_1 \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) + \varepsilon_2 \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) + \varepsilon_3 \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0)
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_6(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= q_1 \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_1}(\zeta_0) + q_2 \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_2}(\zeta_0) + q_3 \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_3}(\zeta_0) \cdots \\
&\cdots + \varepsilon_1 \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) + \varepsilon_2 \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) + \varepsilon_3 \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0)
\end{aligned} \tag{3.125}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que obtenemos, es

$$\dot{\mathbf{X}}_\zeta = \mathbf{J}_\zeta \mathbf{X}_\zeta \tag{3.126}$$

$$\mathbf{X}_\zeta = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\zeta_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_1}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_1}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_2}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_2}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_3}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_3}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_3}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_3}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_3}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_3}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \end{pmatrix} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{J}_{\zeta_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_4}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_5}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \\ \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial q_3}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_1}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_2}(\zeta_0) & \frac{\partial \zeta_6}{\partial \varepsilon_3}(\zeta_0) \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

Donde “ \mathbf{J}_{ζ_0} ” es la matriz Jacobiana de la transformación vectorial

“ $\vec{\zeta}(q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ”, siendo el Jacobiano evaluado en el punto fijo ζ_0 .

Los elementos de la matriz Jacobiana que quedan indeterminados hasta estudiar un sistema mecánico particular, se evaluarán con (3.104) a (3.122), pero este proceso estará sumergido en el algoritmo que se explicará en la siguiente sección; por lo pronto digamos que los elementos de la matriz Jacobiana ya evaluados en el punto fijo son “ J_{ij} ” y procedamos a resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que va a resolver el algoritmo es (3.129). Pudieramos pensar en factorizar la matriz Jacobiana como un producto de dos matrices triangulares para las cuales la obtención de los eigenvalores es automática, esto se hará cuándo ya se sepa si se tienen soluciones asintóticamente estables, para proceder solo a la solución mediante un método computacionalmente barato.

El polinomio característico de la matriz Jacobiana de (3.129), es

$$P(\lambda) = Det[\mathbf{J}_{\zeta_0} - \lambda \mathbf{I}] \quad (3.130)$$

Después de suficiente álgebra y factorizando términos para facilitarle el trabajo a la CPU cuando tenga que evaluar un sistema mecánico particular (las sumas cuestan menos tiempo de cómputo que las multiplicaciones), tenemos que

$$P(\lambda) = \lambda^6 - D_5\lambda^5 + D_4\lambda^4 + D_3\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_1\lambda + D_0 \quad (3.131)$$

Donde las constantes “ D_i ” valen lo siguiente

$$D_5 = J_{55} + J_{66}$$

$$D_4 = J_{55}J_{66} - J_{44} - J_{63} - J_{41}$$

$$D_3 = J_{44}(J_{55} + J_{66} + J_{63}) - J_{43}J_{64} - (J_{53} - J_{52})J_{65} + J_{55}J_{63} \cdots \\ \cdots + J_{41}(J_{55} + J_{66})$$

$$D_2 = J_{44}[J_{53}J_{65} - J_{55}(J_{63} + J_{66})] + J_{43}(J_{64}J_{55} - J_{54}J_{65}) \cdots \\ \cdots + J_{52}(J_{63} - J_{44}J_{65}) - J_{62}J_{53} + J_{42}J_{54}J_{65} - J_{41}(J_{55}J_{66} - J_{63}) \cdots \\ \cdots - J_{43}J_{61} + J_{41}J_{52} - J_{42}J_{51}$$

$$D_1 = J_{52}(J_{43}J_{64} - J_{44}J_{63}) + J_{53}(J_{44}J_{62} - J_{42}J_{64}) - J_{43}J_{62}J_{54} \cdots \\ \cdots + J_{42}J_{54}J_{63} + J_{66}(J_{42}J_{51} - J_{41}J_{52}) - J_{65}(J_{43}J_{51} - J_{41}J_{53})$$

$$D_0 = J_{41}(J_{53}J_{62} - J_{52}J_{63}) + J_{42}(J_{51}J_{63} - J_{61}J_{53}) \cdots \\ \cdots + J_{43}(J_{52}J_{61} - J_{51}J_{62})$$

(3.132)

No podemos ir mas lejos de (3.131) y (3.132) para hallar los eigenvalores de la matriz Jacobiana del sistema (3.129), las derivadas de los campos escalares ζ_i , $i = 4, 5, 6$, que necesitamos evaluar en el punto fijo; estan en términos de los factores de escala del sistema coordinado ortogonal. No se ha elegido ni siquiera un potencial o sistema mecánico a estudiar, pues hay que recordar que se desea un algoritmo que funcione para cualquier sistema ortogonal.

Pero supongamos que el usuario ya tiene un sistema mecánico en mente y el sistema coordinado que desea usar, el algoritmo de la siguiente sección toma en cuenta todo el trabajo teórico ya

hecho y empezará con el trabajo de hallar los 6 eigenvalores “ $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ”; de la matriz jacobiana del sistema (3.129), usando directamente (3.131) y (3.132).

Supongamos que ya tenemos los eigenvalores de la matriz Jacobiana en (3.129) y son λ_i . Puede suceder que existan eigenvalores que se repitan, pero primero supongamos que no hay eigenvalores repetidos y que todos son números reales, en cuyo caso la solución general de (3.129), es

$$\mathbf{X}_\zeta(t) = \sum_{i=1}^{i=6} c_i \vec{k}_i e^{\lambda_i t} \quad (3.133)$$

donde c_i son las condiciones iniciales $\vec{q}(t=0)$ y $\dot{\vec{q}}(t=0)$; \vec{k}_i es un vector propio correspondiente al valor propio λ_i .

Ahora supongamos que existen $k \leq 6$ eigenvalores “ λ_k ”, cada uno de multiplicidad m_k ; si por otro lado existe un número n_0 de eigenvalores que no se repiten, naturalmente se tiene que tener que: $n_0 + \sum_k m_k = 6$. Luego, de cada eigenvalor λ_k con multiplicidad m_k se pueden extraer las siguientes m_k soluciones linealmente independientes

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{m_k 1}(t) &= \vec{k}_{11} e^{\lambda_k t} \\ \mathbf{X}_{m_k 2}(t) &= \vec{k}_{21} t e^{\lambda_k t} + \vec{k}_{22} e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_{m_k m_k}(t) &= \vec{k}_{m_k 1} \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} e^{\lambda_k t} + \vec{k}_{m_k 2} \frac{t^{m_k-2}}{(m_k-2)!} e^{\lambda_k t} + \cdots + \vec{k}_{m_k m_k} e^{\lambda_k t} \end{aligned} \quad (3.134)$$

De esta manera, sumandose las soluciones de (3.134) para cada λ_k y las soluciones de los n_0 eigenvalores no repetidos, obtenemos las 6 soluciones linealmente independientes de (3.129) que necesitamos; recordando que si existen eigenvalores complejos, estos tienen que venir en pares conjugados, entonces para los eigenvalores del tipo: $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$; se pueden extraer las siguientes dos soluciones reales y linealmente independientes

$$\mathbf{X}_-(t) = [\vec{B}_1 \cos(\beta t) - \vec{B}_2 \sin(\beta t)] e^{\alpha t} \quad (3.135)$$

$$\mathbf{X}_+(t) = [\vec{B}_2 \cos(\beta t) + \vec{B}_1 \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$$

donde

$$\vec{B}_1 = \text{Re} \left[\vec{k}_+ \right] \quad (3.136)$$

$$\vec{B}_2 = \text{Im} \left[\vec{k}_+ \right]$$

siendo \vec{k}_+ el eigenvector asociado al eigenvalor complejo $\lambda_+ = \alpha + i\beta$.

Por lo tanto, teniendo los eigenvalores de la matriz Jacobiana de (3.129); (3.133), (3.134) y (3.135), reúnen toda la información que necesitamos para construir las 6 soluciones linealmente independientes de (3.129) y por lo tanto las 3 soluciones linealmente independientes del sistema mecánico original.

Se procederá a plantear las soluciones (3.133), (3.134) y (3.135), solo cuando tengamos un punto de equilibrio asintóticamente estable; de otro modo se propondrá una solución en forma de series de potencias en el sistema no lineal. El polinomio característico (3.131), de la matriz Jacobiana de 6×6 asociada al sistema

lineal de primer orden, tiene exactamente 6 raíces (Teorema fundamental del Álgebra); el algoritmo calculará directamente en una rutina de C++ los *determinantes de Hurwitz* [7] asociados a este polinomio característico $P(\lambda)$ y mediante el *criterio de estabilidad de Hurwitz* [7] determinará si el polinomio posee únicamente raíces “ λ_i ” con parte real estrictamente negativa, de ser así el caso, por el *teorema de Poincaré-Lyapunov* podremos asegurar que nuestras soluciones se comportarán asintóticamente estables.

Lo interesante de los determinantes de Hurwitz asociados a un arbitrario polinomio, es que sus términos son únicamente coeficientes del polinomio y por lo tanto esto provee un procedimiento algorítmico para checar la naturaleza de las raíces del polinomio.

3.2. Un algoritmo para las integrales del movimiento cuando el esquema de linealización falla.

Supongamos que el usuario tiene cierto sistema mecánico que quiere estudiar y ya eligió el sistema coordenado que quiere usar. Después de que el usuario provee las funciones coordenadas y las condiciones iniciales del sistema, el algoritmo arranca y avienta las integrales del movimiento en una primera instancia, antes de continuar con la animación del sistema. El algoritmo para la animación se explica en el siguiente capítulo.

Se explicará de manera muy general el algoritmo, pero se adjuntará a la tesis la implementación del algoritmo de esta sección mediante un código de C++, que se guardará como una librería.

Teniendo el sistema mecánico a estudiar, sus coordenadas y sus condiciones iniciales, el algoritmo arrancará calculando la matriz Jacobiana de la transformación vectorial $\vec{\zeta}$ en (3.74), luego sucederá alguna de las siguientes dos cosas

1. La matriz Jacobiana tendrá todos sus eigenvalores con parte real negativa, en cuyo caso se opta por la linearización del sistema y se procederá a establecer las 6 soluciones independientes a (3.126) mediante (3.133), (3.134) y (3.135); obteniendo también las 3 soluciones del sistema mecánico original.
2. La matriz Jacobiana no tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa y por lo tanto no se tendrán soluciones asintóticamente estables, en cuyo caso se propondrá una solución en forma de serie de potencias para cada una de las integrales del movimiento: $q_i(t)$. La solución propuesta se insertará en (3.65), que son exactamente las mismas ecuaciones que (3.74), pero debido a que el algoritmo trabajará con series, computacionalmente es mejor usar las ecuaciones del movimiento en la forma de (3.65) y evitar la mayor cantidad posible de división de series, que es un algoritmo costoso.

Si sucede el punto número 1) ya no hay más por hacer, ahora supongamos que sucede el punto 2). Reescribamos las ecuaciones de (3.65) nuevamente en esta sección, por simple comodidad

$$\begin{aligned}
15h_1^2\ddot{q}_1 &= 8\dot{q}_1\partial_{q_1}V - 8\dot{h}_1^2 + 4\partial_{q_1}G \\
15h_2^2\ddot{q}_2 &= 8\dot{q}_2\partial_{q_2}V - 8\dot{h}_2^2 + 4\partial_{q_2}G \\
15h_3^2\ddot{q}_3 &= 8\dot{q}_3\partial_{q_3}V - 8\dot{h}_3^2 + 4\partial_{q_3}G
\end{aligned} \tag{3.137}$$

$$G(q_1, q_2, q_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 16V$$

En el parrafo que esta inmediatamente arriba de la ecuación (3.41), se dice lo siguiente: Se hace una aproximación pequeña, pero no lo suficientemente pequeña como para despreciar por completo el término cuadrático, teniendo entonces que “ $\dot{q}_i^2 \approx \dot{q}_i$ ”. Pero las ecuaciones en la forma de (3.137), *se siguen viendo muy feas aún con la aproximación mencionada*, así que en este punto, en el caso de que el esquema de linealización falle para las ecuaciones del movimiento (debido a que no se podrán tener soluciones asintóticamente estables), haremos la aproximación de que las velocidades generalizadas ahora si son lo suficientemente pequeñas como para tener:

$$\dot{q}_i^2 \approx 0 \tag{3.138}$$

A partir de este momento, seguiremos bajo la aproximación establecida en (3.138). Notemos que

$$\dot{h}_i^2 = \frac{dh_i^2}{dt} = 2h_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial t} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} = 2h_i \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \tag{3.139}$$

Entonces, usando (3.138), tenemos que

$$\dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3\dot{h}_i^2 \approx 0 \tag{3.140}$$

Y las ecuaciones del movimiento las podemos poner en la siguiente forma

$$\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \left(15h_i^2 \ddot{q}_i \right) = 8\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{q}_i \partial_{q_i} V - 8\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{h}_i^2 + 4\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \partial_{q_1} G \quad (3.141)$$

$$\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \left(15h_i^2 \ddot{q}_i \right) = 4\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \partial_{q_1} G \quad (3.142)$$

$$15h_i^2 \ddot{q}_i - 4\partial_{q_1} G = 0 \quad (3.143)$$

Usando el valor de “ G ” en (3.137), las ecuaciones del movimiento en el límite “ $\dot{q}_i \ll 1$ ”, toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} 15h_1^2 \ddot{q}_1 - 4\partial_{q_1} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 16V) &= 0 \\ 15h_2^2 \ddot{q}_2 - 4\partial_{q_2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 16V) &= 0 \\ 15h_3^2 \ddot{q}_3 - 4\partial_{q_3} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 16V) &= 0 \end{aligned} \quad (3.144)$$

Es bueno recordar que la librería *GiNaC* para el manejo de álgebra simbólica, incluye una rutina que es capaz de calcular la derivada (cuando existe) de todas las funciones trascendentales, por ejemplo: $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, e^x ; esta rutina también es capaz de calcular derivadas de funciones compuestas como las siguientes: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $h(x) = f(x)u(x)$; como comentario final, la misma rutina puede calcular la derivada de polinomios arbitrarios de orden finito con coeficientes en \mathbb{R} . Dadas las coordenadas cartesianas como funciones de las coordenadas generalizadas (estas funciones coordenadas serán datos de entrada del usuario), el algoritmo calculará con ayuda de la librería *GiNaC*, las siguientes cantidades

$$N_i(q_1, q_2, q_3) = 15h_i^2, \quad R_i(q_1, q_2, q_3) = 4\partial_{q_i}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 16V) \quad (3.145)$$

Las dos cantidades en (3.145) serán funciones de las $q_i \rightarrow N_1(q_i, q_2, q_3)$ y $R_i(q_1, q_2, q_3)$. Es rarísimo que existan sistemas coordenados donde las funciones coordenadas cartesianas, **no se puedan separar** como una suma de productos de 3 funciones

$$x_i(q_1, q_2, q_3) \neq \sum_i f_i(q_1)u_i(q_2)w_i(q_3) \quad (3.146)$$

donde $x_i = x, y, z$. Por ejemplo, en el caso del péndulo doble en \mathbb{R}^2 si es viable; se tienen 2 grados de libertad “ θ_1, θ_2 ”; pero las funciones coordenadas $x_{(1,2)i} = x_{1,2}, y_{1,2}$, de cada péndulo del sistema compuesto del *péndulo doble*, son

$$x_1(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \text{sen}(\theta_1) \quad (3.147)$$

$$y_1(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \cos(\theta_1)$$

$$x_2(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \text{sen}(\theta_1) + \ell_2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$x_2(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \text{sen}(\theta_1) + \ell_2 \left[\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \right]$$

$$y_2(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$y_2(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \left[\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \right] \quad (3.148)$$

A partir de este momento, y se volverá a mencionar en el algoritmo del capítulo 5, se exigirá que el usuario se restringa a

sistemas coordenados donde las funciones coordenadas cartesianas se puedan poner de la siguiente manera

$$x_i(q_1, q_2, q_3) = \sum_i f_i(q_1)u_i(q_2)w_i(q_3) \quad (3.149)$$

Es claro que en el caso del péndulo doble, las funciones coordenadas cartesianas que debe proveer el usuario como dato de entrada y así generar nuestro abstracto sistema coordenado en este caso, *si satisfacen la condición* (3.154). Los sistemas coordenados más comunes como el cilíndrico y el esférico también satisfacen (3.154).

La razón por la cuál se exige (3.149), es para poder hacer una triple expansión de Taylor de las funciones $N_i(q_1, q_2, q_3)$ y $R_i(q_1, q_2, q_3)$ en (3.145), donde esta expansión triple en realidad va a ser el producto de 3 expansiones de Taylor de una sola variable. Si se cumple (3.149) para el sistema coordenado de nuestra elección, entonces también se cumplirá para las funciones $N_i(q_1, q_2, q_3)$ y $R_i(q_1, q_2, q_3)$; las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} N_1(q_1, q_2, q_3)\ddot{q}_1 &= R_1(q_1, q_2, q_3) \\ N_2(q_1, q_2, q_3)\ddot{q}_2 &= R_2(q_1, q_2, q_3) \\ N_3(q_1, q_2, q_3)\ddot{q}_3 &= R_3(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \quad (3.150)$$

La expansion Taylor de una función de una variable real, alrededor de un cierto punto “ a ”, es

$$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q-a)^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{dq^k} \right|_{q=a} \quad (3.151)$$

Entonces, tomando en cuenta la expansión en el punto:
 $(q_1, q_2, q_3) = (a, b, c)$; tenemos que

$$\begin{aligned}
N_i(q_1, q_2, q_3) &\equiv \sum_{\ell} \left[T_i(q_1) U_i(q_2) W_i(q_3) \right]_{\ell} \\
&= \sum_{\ell} \left[\sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(q_1 - a)^m (q_2 - b)^n (q_3 - c)^k}{m! n! k!} T_i^{(m)}(a) U_i^{(n)}(b) W_i^{(k)}(c) \right]_{\ell}
\end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\begin{aligned}
R_i(q_1, q_2, q_3) &\equiv \sum_{\ell} \left[P_i(q_1) Q_i(q_2) S_i(q_3) \right]_{\ell} \\
&= \sum_{\ell} \left[\sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(q_1 - a)^m (q_2 - b)^n (q_3 - c)^k}{m! n! k!} P_i^{(m)}(a) Q_i^{(n)}(b) S_i^{(k)}(c) \right]_{\ell}
\end{aligned} \tag{3.153}$$

donde la suma sobre “ ℓ ” hace referencia a la cantidad de productos de tres funciones en los que cada “ $N_i(q_1, q_2, q_3)$ ” se descompone.

Ahora si propongamos las siguientes soluciones en forma de series de potencias para las **coordenadas generalizadas** y para las **velocidades generalizadas**

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= d_0 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} t^{r+1} \\
q_2(t) &= e_0 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_r}{r+1} t^{r+1} \\
q_3(t) &= f_0 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{r+1} t^{r+1}
\end{aligned} \tag{3.154}$$

donde “ d_0 , e_0 y f_0 ”; son la condición inicial de las q_i (que nos determinan la condición inicial del vector posición en coordenadas cartesianas). Observando (3.154) y (3.152) ó (3.153), notamos que nos conviene hacer la triple expansión de Taylor alrededor del punto que viene a ser la condición inicial para la *posición*. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1(t) &= a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r \\
\dot{q}_2(t) &= b_0 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r t^r \\
\dot{q}_3(t) &= c_0 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r t^r
\end{aligned} \tag{3.155}$$

$$\ddot{q}_1(t) = \sum_{r=1}^{\infty} r a_r t^{r-1}$$

$$\ddot{q}_2(t) = \sum_{r=1}^{\infty} r b_r t^{r-1} \tag{3.156}$$

$$\ddot{q}_3(t) = \sum_{r=1}^{\infty} r c_r t^{r-1}$$

En el caso $r \neq 0$, las constantes “ a_r, b_r y c_r ”, se deben de obtener de una manipulación adecuada de las ecuaciones del movimiento; las cuáles también haremos coincidir con las condiciones iniciales.

Hay que insertar (3.154) y (3.156) en (3.150), pero una vez que (3.150) este en términos que son únicamente series de las “ q_i ”, en otras palabras, *se tendrán series dentro de otras series*.

Dejar las ecuaciones del movimiento en la siguiente forma

$$\sum_{m,n,k,r} [A_{m,n,k}]t^r = 0$$

$$\sum_{m,n,k,r} [B_{m,n,k}]t^r = 0 \quad (3.157)$$

$$\sum_{m,n,k,r} [C_{m,n,k}]t^r = 0$$

es un trabajo álgebraico excepcional si se hace a mano; pero es lo que necesitamos hacer, si deseamos que nuestras ecuaciones del movimiento se cumplan para todo el valor “ t ” ó dominio de la integral del movimiento “ $\vec{x}(t)$ posición”.

Las ecuaciones del movimiento a como estan en la forma de (3.157), con las cantidades constantes “ $A_{m,n,k}$, $B_{m,n,k}$ y $C_{m,n,k}$ ”; son una combinación de más términos entre los cuales vienen las constantes que se tienen que determinar: “ a_r, b_r y c_r ”. Las ecuaciones diferenciales del movimiento pasan a ser un sistema de 3 ecuaciones álgebraicas con 3 incógnitas. Observemos en (3.154) que al determinar “ a_r, b_r y c_r ”, determinamos por completo las soluciones a las ecuaciones del movimiento que estamos buscando: “ $q_1(t)$, $q_2(t)$ y $q_3(t)$ ”.

En una última instancia, resolver un sistema álgebraico de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es un procedimiento algorítmico, si se presta suficiente atención se ve que se requiere únicamente de una secuencia de pasos bien establecidos y que fácilmente pueden ser seguidos por una CPU; *no hay necesidad de que la CPU sea creativa*. Esta secuencia de pasos se codifica directamente en la rutina C++ que se va implementar.

El algoritmo que se diseñó para encontrar las integrales del movimiento, toma en cuenta **todo el capítulo 4**; primero se decide si el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento es linealizable: *se usa el criterio de Hurwitz para un polinomio arbitrario, pero con el polinomio característico en (3.131), que está asociado a la matriz Jacobiana del sistema lineal asociado a las ecuaciones del movimiento; luego, tomando en cuenta el **teorema de Poincaré-Lyapunov**, se decide si las soluciones se comportarán asintóticamente estables* (eigenvalores de la matriz Jacobiana con parte real estrictamente negativa). Si no se tienen soluciones asintóticamente estables, se abandona el esquema de linealización y el algoritmo arrojará las soluciones descritas en (3.154) (después de que el algoritmo halla hecho el descomunal trabajo algebraico de obtener las constantes “ a_r, b_r y c_r ”).

Este capítulo termina entonces con la explicación de como el algoritmo obtendrá las ecuaciones del movimiento mediante una rutina en C++, se puede proceder al capítulo 5 teniendo en mente que ya se obtuvieron las integrales del movimiento.

Capítulo 4

El proceso de Animación.

4.1. Discretización de las integrales del movimiento.

Si “ $\vec{x}(t)$ ” representa el vector posición de la dinámica de una partícula puntual en cierto intervalo de tiempo, este vector será una función en general *al menos continua*, durante el intervalo de tiempo que dure la dinámica; la posición de la partícula estará representada por una curva contenida en \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 .

Digamos que tenemos el vector posición $\vec{x}(t)$ de cierta partícula moviéndose en \mathbb{R}^3 y $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos que definen a la dinámica completa de $\vec{x}(t)$; clásicamente \mathbf{A} es un conjunto no contable. Si deseamos simular en una computadora la dinámica de $\vec{x}(t)$ tenemos un problema de inmediato: *es imposible graficar un conjunto no contable ó continuo de puntos en una computadora.*

Toda CPU sobre la faz de la tierra traza curvas continuas mediante una aproximación, esta aproximación consta en esencia de los siguientes tres puntos

- 1.- Sea $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto de puntos que definen la dinámica completa de cierta partícula.

- 2.- Se escoge algún subconjunto finito de puntos
 $\mathbf{B}_* = \{\vec{\mathbf{x}}_i / \vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{x}}(t_i), i = 0, 1, \dots, N.\}$ del conjunto continuo \mathbf{A} .
- 3.- Se unen con segmentos rectilíneos los puntos de \mathbf{B}_* , obteniendo así una aproximación de la dinámica real de la partícula.

Es importante remarcar el siguiente punto: *El trabajo realizado en la presente tesis y el código de las librerías del motor gráfico, todo esta basado teniendo en cuenta esta aproximación.*

Sucede algo similar para el vector velocidad

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} \quad (4.1)$$

La velocidad es también en general una curva continua, pero el vector velocidad esta completamente definido por el vector posición mediante la relación (4.1), al hacer una aproximación para la trayectoria de una partícula estamos aproximando de manera indirecta a su velocidad de la siguiente manera:

Hacemos que la partícula cruce “N”segmentos con movimiento rectilíneo uniforme.

Hay que recordar también que los vectores unitarios relacionados a cierto sistema coordenado ortogonal son en general no constantes, pero en coordenadas cartesianas si lo son. Aunque el motor virtual usa coordenadas generalizadas para resolver las ecuaciones del movimiento, la animación se hace usando el vector posición en coordenadas cartesianas, por este motivo, el algoritmo para la animación, usará el hecho de aproximar únicamente las velocidades escalares \bar{v}_x , \bar{v}_y y \bar{v}_z ; que son las componentes del vector velocidad en coordenadas cartesianas.

Se hace uso de aproximar las cantidades escalares “ \bar{v}_i ” de la siguiente manera

$$\frac{dx_i}{dt} \approx \bar{v}_i \quad (4.2)$$

$$\bar{v}_i = \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

donde “ $x_i = x, y, z$ ” y “ $\bar{v}_i = \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$ ”. Se nota que

$$\bar{v}_i \longrightarrow \frac{dx_i}{dt} \quad \text{si} \quad \Delta t \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

4.2. Un algoritmo para la animación de un *Sistema Hamiltoniano Conservativo*.

Se explicará el concepto de *animación por computadora* con los siguientes tres puntos

- 1. Se tiene un conjunto de objetos que se desea animar, se tienen “ \mathbf{N} ” diapositivas, $\{D_1, D_2, \dots, D_N\}$; en cada diapositiva se tendrá a los objetos en diferentes posiciones.
- 2. La transición $D_i \longrightarrow D_{i+1}$, desde $i = 1$ hasta $i = N - 1$ y de manera ininterrumpida; es lo que compone la animación.
- 3. Entre más grande sea el número “ N ” de diapositivas y mas pequeño sea el intervalo de tiempo “ Δt_i ” que duran las transiciones $D_i \longrightarrow D_{i+1}$, más fluida será la animación.

Se puede idealizar una animación perfectamente fluída de **\mathbf{N} puntos en \mathbb{R}^3** , en el siguiente límite continuo: Sea $\mathbf{D} = \{D_{\mathbf{x}(t)}/\mathbf{x}(t) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^3\}$, el conjunto de todas las diapositivas que conforman la animación y “ $\mathbf{x}(t)$ ” un vector en \mathbb{R}^N cuyas entradas son los N puntos a trazarse, que no son otra cosa mas que

N curvas en \mathbb{R}^3 parametrizadas por la variable continua “ t ”; de esta manera, podemos decir que $D_{\mathbf{x}(t)}$ representa el conjunto de N curvas moviéndose en \mathbb{R}^3 .

Si asumimos que el tiempo es una variable continua en la naturaleza, salta a la vista que una animación por computadora nunca podrá ser perfectamente fluída, pues necesitaríamos un disco duro con una cantidad *infinita continua* de espacio para simplemente almacenar todas las diapositivas que necesitamos.

Se explicará un algoritmo que es capaz de generar la animación de un *Sistema Hamiltoniano Conservativo* que consta de **1 partícula puntual**, se tomará en cuenta que ya se tienen las integrales del movimiento de dicha partícula, ya sea por métodos del capítulo 4 o por que el usuario ya las tenía a su disposición. Aunque se explicá para 1 partícula en \mathbb{R}^3 (3 grados de libertad), el algoritmo funciona para cualquier cantidad finita de grados de libertad; se explicá para 1 partícula para que se entienda con profundidad el algoritmo y por que generar la animación de **N** partículas ó **N** cuerpos rígidos es simplemente “meter las integrales del movimiento de **N-1** partículas en el ciclo que genera la animación de 1 partícula”.

Hay muchas maneras de generar una animación por computadora, algunas toman en cuenta controlar la velocidad de la animación y otras no. Nosotros estamos interesados en representar la dinámica de un cierto sistema mecánico y las leyes de la Mecánica Newtoniana nos dictan que velocidad deben llevar las partes de dicho sistema (el motor no lidiará con situaciones relativistas), por lo tanto, debemos exigir como parte de nuestro proceso de animación, poder controlar la velocidad de los objetos “*moviéndose*” en pantalla.

Controlar la velocidad de cierta animación por computadora es complicado, pues la velocidad a la que se traza la trayectoria de un punto en pantalla depende del hardware de la CPU. Sin embargo, se encontró *una manera aproximada* de resolver este problema; de esta manera, el algoritmo que se presentará en la siguiente sección no depende del hardware de la CPU.

4.2.1. El algoritmo.

El algoritmo para animar a 1 partícula puntual, estará descrito en una serie de instrucciones numeradas. Con este algoritmo también se puede representar la animación de un **Sistema Hamiltoniano Conservativo** (sistema descrito en el capítulo 2), así como se uso para realizar la animación del caso de estudio presentado en esta tesis.

1. Se toma en cuenta para el algoritmo que ya se conocen las cantidades “ $q_i(t)$ ”, pero también necesitamos el vector posición de la partícula, digamos “ $\vec{r}(t)$ ”, para generar la animación; esto se menciona por que el vector posición en general es diferente a:

$$\vec{q} = q_1\hat{q}_1 + q_2\hat{q}_2 + q_3\hat{q}_3;$$

por ejemplo en cilíndricas (ρ, θ, z) es:

$$\vec{r}(t) = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}.$$

En cartesianas (x, y, z) es simplemente:

$$\vec{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Por lo tanto: *usaremos el vector posición en coordenadas cartesianas, poniendo a las coordenadas cartesianas como funciones de las $q_i(t)$ que ya se conocen, antes de empezar la animación.*

2. Ya que el motor virtual se restringe a la mecánica de Newton, el usuario debe comprender que no debe usar velocidades iniciales relativistas ó tratar de resolver sistemas

clásicos en el límite relativista con el motor virtual. Luego, se tendrá un conjunto de “N” puntos de la curva $\vec{x}(t)$, $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, con $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$. El número de diapositivas que conformaran la animación será “N”, $\mathbf{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$; la diapositiva D_i corresponde a la posición de la partícula al tiempo t_i .

3. La longitud de arco entre \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_{i+1} , es $s_i = \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} ds$; si los “N” puntos los elegimos de tal manera que no esten igualmente espaciados en la curva, $s_i \neq s_{i+1}$; $i = 1, 2, \dots, N - 1$; entonces podemos optar por dejar fijo el intervalo temporal que corresponde a la duración de una transición entre diapositivas: $D_i \rightarrow D_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Esto aparentemente causa conflicto con el hecho de querer controlar la velocidad de animación, pero recordemos que estamos haciendo una aproximación, la partícula cruzará “N” segmentos rectilíneos de diferente longitud con velocidad uniforme (pero con un valor diferente para la velocidad en cada segmento), en lugar de “1” curva donde la velocidad posiblemente tenga un valor diferente en cada punto del *continuo*.
4. La distancia de arco “ s_i ” que viaja la partícula de “ \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_{i+1} ”, lo hace en un intervalo de tiempo digamos “ Δt_i ”. Como mencionamos en el punto anterior, si los N puntos a elegir, *no estan igualmente espaciados sobre la curva*, podemos optar por “ $\Delta t_i = \Delta t_{i+1}$ ”.
5. Una película contemporánea es en realidad un conjunto grande de fotografías que hacen una transición a una velocidad de 60 fotografías por segundo (tener 60 diapositivas hace que se tengan en realidad 59 transiciones); en general, se tiene un intervalo de tiempo de $1/59$ seg para las transiciones. Ya que las películas se ven ante el ojo humano como una animación fluída, usaremos lo mencionado sobre

las películas como un estandar para decir que las animaciones del motor son lo suficientemente fluídas: *para nuestro conjunto de N diapositivas, tendremos asociados $N-1$ distancias de arco “ $\mathbf{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$ ” y $N-1$ intervalos de tiempo “ $\mathbf{\Delta} = \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_{N-1}\}$ ”; donde seleccionaremos “ $s_i \neq s_{i+1}; i = 1, 2, \dots, N - 1$ ” de tal manera que: “ $\Delta t_i = \Delta t_{i+1} = 1/60 \text{ seg}; i = 1, 2, \dots, N - 1$ ”.*

6. Considerando cada arco y cada segmento rectilíneo, se trazará la distancia euclídeana entre \mathbf{x}_i y $\mathbf{x}_{i+1} \longrightarrow \ell_i = \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|$, en vez de su distancia de arco s_i . Si la condición inicial es “ $\vec{\mathbf{x}}(0)$ ”, se espera que tanto la longitud euclídeana inicial “ $\ell_0 = \|\mathbf{x}(\frac{1}{60}) - \mathbf{x}(0)\|$ ”; como el resto de las longitudes euclídeanas “ $\mathbf{L} = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{N-1}\}$ ”; sean lo suficientemente pequeñas. La animación debe dar la apariencia de que la partícula se esta desplazando *continuamente*, en vez de estarse *teletransportando entre posiciones consecutivas muy alejadas entre sí*; si se llegará a presentar dicha situación, se dejará a consideración del usuario si quiere arreglarlo, pero lo que se tiene que hacer es elegir un intervalo de tiempo mas pequeño que el estandar de $\Delta t = 1/60 \text{ seg}$. Uno de los datos de entrada que pedirá aquel programa que haga uso de la librería del motor, es precisamente este intervalo temporal “ Δt ”. Notesé que no importa mucho si la integral del movimiento “ $\vec{\mathbf{x}}(t)(\text{posición})$ ” es creciente ó decreciente; pues nos interesan más las distancias euclídeanas entre dos puntos sucesivos $\vec{\mathbf{x}}_i$ y $\vec{\mathbf{x}}_{i+1}$, que los puntos en sí. Debido a que no estamos en ningún tipo de régimen relativista, la partícula no podrá moverse lo suficientemente rápido como para que las distancias “ ℓ_i ” entre puntos sucesivos $\vec{\mathbf{x}}_i$ y $\vec{\mathbf{x}}_{i+1}$, sean tan grandes que arruinen la animación, aunque

individualmente los puntos \vec{x}_i tengas valores grandes.

7. Como se menciona en el punto número 1, usaremos al vector posición en coordenadas cartesianas, siendo las coordenadas cartesianas funciones de las coordenadas generalizadas
- $$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z};$$

donde

$$x(t) \longrightarrow x(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\hat{x}.$$

$$y(t) \longrightarrow y(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\hat{y}.$$

$$z(t) \longrightarrow z(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\hat{z}.$$

8. Aprovechando que los vectores unitarios en coordenadas cartesianas son constantes, el vector *velocidad* se aproximará **en cada arco** “ s_i ” **ó segmento euclídeano** “ ℓ_i ” de la siguiente manera

$$\vec{v}(t_i) \approx \bar{\vec{v}}(t_i) = \bar{v}_x(t_i)\hat{x} + \bar{v}_y(t_i)\hat{y} + \bar{v}_z(t_i)\hat{z};$$

donde

$$\bar{v}_x(t_i) \approx \frac{x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i)}{\Delta t_i}.$$

$$\bar{v}_y(t_i) \approx \frac{y(t_i + \Delta t_i) - y(t_i)}{\Delta t_i}.$$

$$\bar{v}_z(t_i) \approx \frac{z(t_i + \Delta t_i) - z(t_i)}{\Delta t_i}.$$

Claro que $\Delta t_i = \Delta t_{i+1}$. Se usará esta aproximación para todos los segmentos, excepto para el primero, donde tenemos que usar las condiciones iniciales.

9. Recordemos que en este punto del motor, ya se tienen las integrales del movimiento; sin embargo, al correr algún pro-

grama que haga uso de la librería del motor, se ejecutarán los 2 algoritmos principales del motor virtual de manera seguida: 1)El algoritmo para obtener las integrales del movimiento, ya explicado en el capítulo 4 de la tesis. 2)El algoritmo para realizar la animación del sistema, que esta siendo explicado en esta serie de pasos numerados.

10. Por otro lado, el programa en pantalla preguntará si se desea usar la rutina que se incluye para las integrales del movimiento ó si el usuario prefiere introducir por su cuenta las integrales del movimiento previamente calculadas por algun otro medio; el programa también preguntará si se desea realizar la animación en pantalla ó terminar la ejecución del programa con el calculo de las integrales del movimiento. Independientemente de que decisión tome el usuario, respecto a si usar ó no alguna de las 2 rutinas principales del motor, el usuario siempre deberá introducir ciertos datos de entrada; si se decide ignorar algún algoritmo del motor, simplemente se ignoraran los datos de entrada que no se usen. **Los datos de entrada** que el usuario deberá ingresar al momento de ejecutar el programa, son

- (1) Las letras que van a identificar a las coordenadas generalizadas, comunmente denotadas como “ $\{q_1, q_2, q_3\}$ ”; pero digamos que usamos las letras “ $\{u, v, w\}$ ”.
- (2) También, para cada partícula puntual que compone el sistema, se requieren las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas generalizadas “ $\{u, v, w\}$ ”. En el caso de los cuerpos rígidos, estos son modelados como partículas puntuales que tienen un vector *posición* que va del origen del sistema de referencia al centro de masa del cuerpo rígido (recordemos que el motor se restringe al caso sin movimiento rotacional), el motor no hace el cálculo del

centro de masa del cuerpo rígido, sea el cuerpo que sea, el usuario debe conocer este dato en una primera instancia para proporcionar las coordenadas cartesianas del vector posición mencionado con anterioridad.

- (3) La energía potencial del sistema ' $V(\vec{r})$ ', sea 1 partícula o muchas. Este potencial debe ser conservativo, debido al tipo de sistemas que se abordan en el motor virtual.
- (4) Las condiciones iniciales del sistema.
- (5) El intervalo de tiempo " Δt " que va a durar la transición entre diferentes diapositivas de la animación.
- (6) La duración temporal de la animación.

11. Una vez que el programa es ejecutado y los datos de entrada ingresados por el usuario, tendremos por ejemplo, que si se desea que la animación dure 10seg y tomando en cuenta un intervalo de transición entre diapositivas de $\Delta t = 1/60$, entonces el algoritmo *dividirá* al fragmento de curva comprendido en el intervalo de tiempo "[0, 10]", en 600 segmentos rectilíneos ó 601 puntos del rango de la función " $\vec{x}(t)$ "; $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1/60), \mathbf{x}(2/60) \dots, \mathbf{x}(600/60)\}$; donde $\mathbf{x}(0)$ es la condición inicial. Puede ser que la duración establecida por el usuario, digamos " T_0 ", para la animación; no sea divisible por " Δt ", por esta razón en realidad la animación se va a detener en alguna iteración " $m \in \mathbb{N}$ ", tal que " $m\Delta t \geq T_0$ ".
12. Siguiendo con el mismo ejemplo (*duración de la animación* $T_0 = 10\text{seg}$ y $\Delta t = 1/60$), a cada punto del conjunto \mathbf{X} , se

le asociará una diapositiva; tendremos el siguiente conjunto de diapositivas:

$\mathbf{D} = \{D_0, D_1, \dots, D_{600}\}$. Para la transición inicial: $D_0 \longrightarrow D_1$; la partícula pasa de la posición $\mathbf{x}(0)$ a la $\mathbf{x}(1/60)$, con cierto valor inicial de la velocidad “ v_0 ”, donde: $\vec{\mathbf{v}}(0) = \langle v_x(0), v_y(0), v_z(0) \rangle$ y $v_0 = \|\vec{\mathbf{v}}(0)\|$. Para las transiciones: $D_i \longrightarrow D_{i+1}$; $i = 1, 2, \dots, 599$; la partícula pasa de la posición $\mathbf{x}(i/60)$ a la $\mathbf{x}(i/60 + 1/60)$, con cierto valor de la velocidad “ v_i ”, donde: $\vec{\mathbf{v}}(t_i) \approx \bar{\mathbf{v}}(t_i)$; donde $v_i = \|\bar{\mathbf{v}}(t_i)\|$. El término “ $\bar{\mathbf{v}}(t_i)$ ” es el mismo que aparece en el punto 8 de la explicación del algoritmo.

13. Analizando bien el punto número 12 y recordando que una CPU es incapaz de entender el concepto de *continuo*, vemos que en realidad ya se está tomando en cuenta la velocidad de la partícula en la animación, hasta cierta aproximación: *a la transición de diapositivas $D_i \longrightarrow D_{i+1}$ le corresponde una longitud rectilínea “ ℓ_i ” que viajará la partícula; teniendo un conjunto \mathbf{D} de 600 diapositivas, existirá un conjunto de 599 longitudes asociadas a cada transición de diapositivas $\mathbf{L} = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{599}\}$; pero teniendo un intervalo de tiempo “ Δt ” igual para cada transición $D_i \longrightarrow D_{i+1}$, se tendrá que aunque cada “ ℓ_i ” sea una distancia euclídeana muy pequeña, en general “ $\ell_i \neq \ell_{i+1}$ ”. En el Límite continuo $\Delta t \longrightarrow 0$, además tendríamos que en vez de asociar un valor constante “ v_i ” para la velocidad de cada segmento rectilíneo del conjunto de segmentos que aproximan a la curva que traza la partícula \mathbf{L} , se le asocia un valor diferente a la velocidad en cada punto de la trayectoria *continua* y curvilínea de la partícula; teniendo al vector “ $\vec{\mathbf{v}}(t)$ ” en lugar del conjunto de valores de la velocidad $\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{599}\}$, siendo “ v_0 ” la magnitud del vector velocidad en su condición inicial.*

14. Resumiendo los 13 pasos anteriores, tendremos los siguientes conjuntos:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1/60), \mathbf{x}(2/60) \dots, \mathbf{x}(600/60)\}.$$

$$\mathbf{D} = \{D_0, D_1, \dots, D_{600}\}.$$

$$\mathbf{L} = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{599}\}.$$

$$\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{599}\}.$$

Estos conjuntos representan información que el algoritmo obtiene antes de iniciar la animación y desplegarla en pantalla, esta información es guardada en una serie de arreglos correspondientes en cierta rutina de C++; luego esta misma rutina genera la animación de la partícula, usando estos arreglos de una manera muy sencilla: *ya se tiene la posición en la cual trazar a la partícula, simplemente se inicializa un cronómetro que al momento de llegar al valor preestablecido “ Δt ” nos indica que se debe efectuar la transición de diapositivas “ $D_i \longrightarrow D_{i+1}$ ”; se reestablece el valor del cronómetro a $t = 0$ seg después de cada transición. La animación termina cuando se realiza la última transición “ $D_{599} \longrightarrow D_{600}$ ”; suponiendo que exista un total de **600** diapositivas.*

Capítulo 5

Perspectivas y conclusiones

Durante el desarrollo de la tesis se estuvieron buscando diversos caminos y metodologías para llegar al resultado esperado, en el trayecto se obtuvieron importantes cosas y logros originales que no se vislumbraron en ningún otro trabajo de investigación similar, se enumeran a continuación los 2 logros más importantes

1. Teniendo un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad, se logró desarrollar un algoritmo que controlará la velocidad de la animación del sistema y que a su vez fuera independiente del *hardware* del CPU que se use para la animación; claro que el ojo humano no es capaz de apreciar velocidades relativistas, pero el motor no trata con regímenes relativistas, mientras los sistemas mecánicos que el usuario desee simular se mantengan en la mecánica Newtoniana, la animación desplegará en pantalla no solo la posición del sistema, si no también lo hará a la velocidad que nos dicta la mecánica Newtoniana. Este punto fue de suma importancia para el proyecto, ya que no se esperó que todos los usuarios tengan el mismo poder de cómputo disponible, de tal manera que el presente proyecto pueda ser usado por cualquier estudiante con un gusto por la física y que desee simular diversos y entretenidos sistemas que no demanden mucho poder de cómputo; pero que también

pueda ser usado en la investigación.

2. Pero aparte, se logró codificar en las librerías, la capacidad de que el usuario elija el **sistema coordinado ortogonal de \mathbb{R}^3** de su preferencia; para resolver las ecuaciones del movimiento.
3. Se descubrió que en el límite de baja velocidad, es posible linealizar el sistema de las ecuaciones del movimiento de un Sistema Hamiltoniano Conservativo en cualquier sistema coordinado ortogonal. Se cubrió la situación cuando el sistema linealizado presenta un punto de equilibrio asintóticamente estable y cuando esto falla, el algoritmo procede con el sistema no lineal directamente.

En la Investigación a realizar en el doctorado, se esperará ampliar las técnicas del presente trabajo a diversos sistemas con un número de grados de libertad infinito-continuo; como por ejemplo flúidos Newtonianos y aportar nuevas metodologías y mejoras en tiempos de cómputo. Se dejó un trabajo de investigación inconcluso, que pudo ser publicado en la revista asociada al Congreso Europeo de Computación ESCO 2014, que se realizó en la República Checa, Pilsen; sin embargo si se viajó a presentar un Poster a dicho congreso. Este trabajo trataba sobre un muy particular sistema con un número de grados de libertad infinito-continuo: *un péndulo en 2-D con un lazo deformable de área finita*; el típico péndulo, pero en vez de estar unido a una varilla rígida de masa despreciable, está unido a un lazo deformable de área finita y con cierta distribuciz'on de masa; se tomará este trabajo y se completará en el Doctorado. Una de las cosas interesantes de este trabajo es que involucrará resolver un par de ecuaciones diferenciales parciales sobre una región que tiene 3 fronteras rectangulares y 1 frontera curvilínea.

Se caracterizará el tipo de sistemas continuos que se estudiarán y que el motor podrá simular a futuro, una vez hecho esto, se esperará crear conceptos y metodologías para optimizar al máximo el tiempo de cómputo de la modelación del sistema continuo a considerar. La investigación de Doctorado empezará donde concluyo la de Maestría.

Bibliografía

- [1] Charles P. Poole Jr. Herbert Goldstein and John L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, New York, third edition edition, May 2001.
- [2] Klaus Iglberger and Ulrich Rude. *The pe Rigid Multi-Body Physics Engine*. University of Erlangen-Nuremberg, Erlangen, Germany, May 2009.
- [3] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, New York, fourth edition edition, March 1986.
- [4] Rodrigo López Pouso. Peano’s existence theorem revisited, arxiv:1202.1152 [math.ca], February 2012.
- [5] Colin B. Price. The usability of a commercial game physics engine to develop physics educational materials: An investigation. *Simulation and Gaming*, 39:319 – 337, September 2008.
- [6] H.L. Royden and P.M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson, London, fourth edition edition, 2010.
- [7] H. S. Wall. Polynomials whose zeros have negative real parts. *The American Mathematical Monthly*, 52:308322, 1945.
- [8] Eric W. Weisstein. Picard’s existence theorem. from mathworld—a wolfram web resource. <http://mathworld.wolfram.com/picardsexistencetheorem.html>.